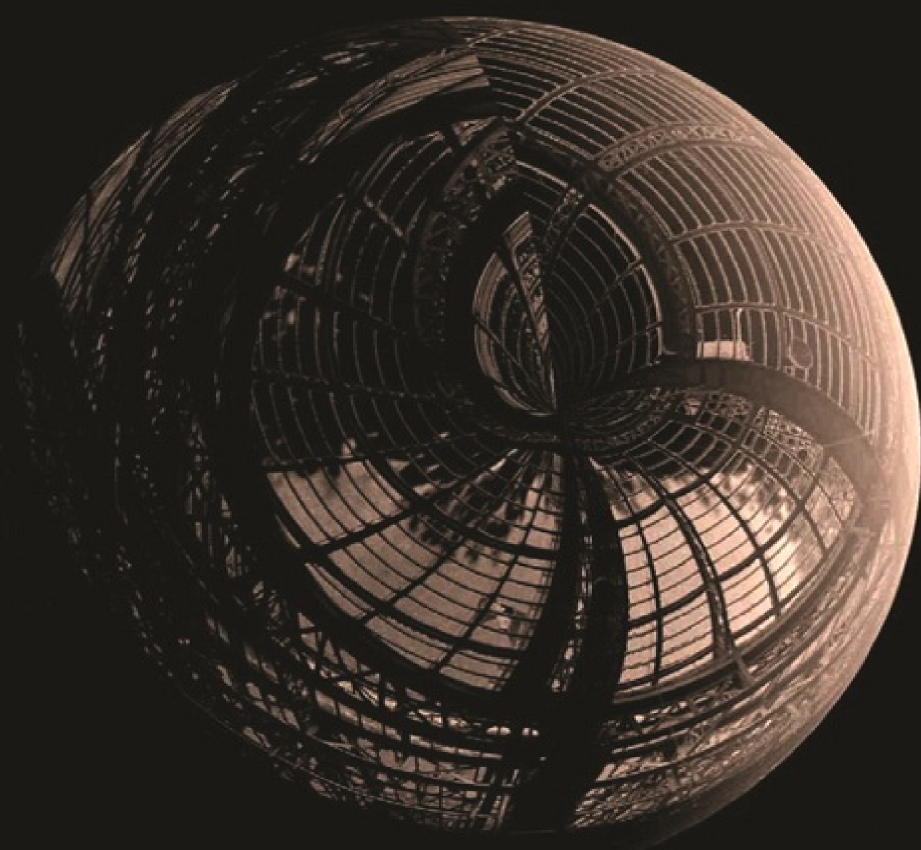
DONAL O'SHEA

Giả thuyết POINCARÉ

Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ





NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC



Donal O'Shea là Trưởng khoa và Hiệu phó học vụ tại trường Mount Holyoke College, đồng thời cũng là giáo sư giảng dạy môn Toán tại đây. Là một nhà hình học đại số, ông đã viết nhiều sách và tài liệu chuyên môn, các bài báo nghiên cứu của ông có mặt ở nhiều tạp chí và kỉ yếu. O'Shea là thành viên Hội Toán học Mĩ, Liên hiệp Toán học Mĩ và các hội toán học của Canada, London và Pháp. Ông sống ở Nam Hadley, Massachusetts. Ông cũng là thành viên của Ủy ban trao giải thưởng Thiên niên kỉ đầu tiên cho Grigory Perelman về công trình tìm ra đáp án cho phỏng đoán Poincaré.

GIẢ THUYẾT POINCARÉ

Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ

Cuốn sách được dịch và xuất bản với sự giúp đỡ của

Cet ouvrage, publié dans le cadre du programme d'aide à la publication, bénéficie du soutien du

The translation and publication of this work was supported by a grant from the

ANNALES DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ
INSTITUT HENRI POINCARE (IHP)
11 rue Pierre et Marie Curie – 75231 Paris Cedex 05 – France
Website: http://www.ihp.jussieu.fr/en/annals

DONAL O'SHEA

GIẢ THUYẾT POINCARÉ

Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ

Nguyễn Lương Quang, Vũ Khuê Tâm
và Phạm Cao Tùng *dịch*

NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

GIẢ THUYẾT POINCARÉ: Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ||Donal O'Shea

THE POINCARÉ CONJECTURE: IN THE SEARCH OF THE SHAPE OF THE UNIVERSE

QUYEN SÁCH NAY DANH TẶNG

CHO MARY VA CHA ME TÔI

Mục lục

HENRI POINCARÉ - MỘT CUỘC ĐỜI PHỤNG SỰ KHOA HỌC

Năm 1954, cộng đồng khoa học thế giới kỉ niệm 100 năm ngày sinh của Jules Henri Poincaré. Ở thời điểm đó, tên tuổi của Poincaré chưa thực sự đạt đến đỉnh cao trong giới toán học, và lúc này, tinh thần của Hilbert đang thống trị hầu khắp tâm trí các nhà toán học. Cả trong lĩnh vực vật lí học, tên tuổi của Poincaré vẫn chưa có gì nổi trội.

Năm 2012, chúng ta kỉ niệm 100 năm ngày mất của Poincaré, danh tiếng của ông đã đạt được những đỉnh cao mới trong giới khoa học và trong công chúng. Là một nhà toán học, một nhà vật lí lí thuyết, một triết gia, ông có tầm hiểu biết cũng như tầm ảnh hưởng sâu rộng lên nhiều lĩnh vực khoa học. Trong lời giới thiệu ngắn gọn này, chúng tôi muốn gửi đến quý độc giả chân dung của ông - một con người suốt đời cống hiến cho khoa học.

1. Cuộc đời và sự nghiệp

Henri Poincaré sinh ngày 29 tháng 4 năm 1854 tại Nancy trong một gia đình danh tiếng vùng Lorraine. Ông nội Jacques-Nicolas là một dược sĩ; bố Léon, một nhà tâm thần học, là Giáo sư Y khoa, Đại học Nancy; chú Antoni (bố của Raymond Poincaré - Tổng thống Pháp giai đoạn 1913-1930) tốt nghiệp Đại học Bách khoa (École

Polytechnique), là Tổng thanh tra cầu đường. Còn cô em gái Aline thì kết hôn với triết gia nổi tiếng Emile Boutroux. Từ nhỏ, Poincaré được các thầy dạy tại nhà. Năm 1862, ông học tại Lycée ở Nancy (bây giờ được đổi tên thành Lycée Henri Poincaré để tưởng niệm ông, thuộc trường Đại học Nancy) và nhanh chóng trở thành học sinh giỏi nhất, một "quái vật toán học". Sau khi tốt nghiệp tú tài về văn chương và khoa học (1871), ông học thi hai năm và thi đỗ trong kì thi quốc gia vào "Trường Lớn". Là một trong năm sinh viên đỗ đầu vào cao nhất của École Normale Supérieure, và là thủ khoa của École Polytechnique, ông đã lựa chọn ngôi trường thứ hai. Tại đây, ông học toán dưới sự hướng dẫn của Charles Hermite, tiếp tục phát triển tài năng toán học của mình và viết bài báo đầu tiên (*Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une surface*) vào năm 1874. Sau đó, ông vào Trường Mỏ, nơi đã truyền cảm hứng về tinh thể học và lí thuyết nhóm cho toán học của ông sau này. Poincaré nhận bằng dip-lôm về toán học tại Khoa Khoa học vào tháng 8 năm 1876. Trong hai năm cuối tại Trường Mỏ, Poincaré đã viết luận án Tiến sĩ về toán học dưới sự hướng dẫn của Charles Hermite. Luận án của ông về lĩnh vực phương trình vi phân, dưới tiêu đề *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations différences* (Về các tính chất của các hàm số xác định bằng phương trình vi phân). Poincaré đã đưa ra một hướng mới trong việc nghiên cứu tính chất của các phương trình này. Ông không chỉ đối mặt với vấn đề xác định tính khả tích của các phương trình vi phân, mà còn là người đầu tiên nghiên cứu các

tính chất hình học tổng quát của chúng. Ông nhận ra chúng có thể được sử dụng để mô hình hóa tương tác giữa các vật thể chuyển động trong Hệ Mặt Trời. Luận án đã mở rộng một số kết quả cổ điển của Briot và Bouquet về các phương trình vi phân thường đơn lẻ thành các phương trình vi phân riêng phần. Và ông bảo vệ thành công vào ngày 1 tháng 8 năm 1879, tại Khoa Khoa học trước một hội đồng gồm Bonnet, Bouquet và Darboux.

Sau một thời gian ngắn làm việc trong ngành Mỏ, năm 1979, Poincaré được nhận vào Đại học Caen, Khoa Khoa học với vị trí là trợ giảng toán học, dạy môn giải tích. Nhưng ông cũng không từ bỏ hoàn toàn nghề mỏ. Ông làm kĩ sư tại Bộ Dịch vụ công cộng với nhiệm vụ là phát triển tuyến đường sắt miền Bắc từ năm 1881 đến 1885. Sau đó ông trở thành Kĩ sư trưởng tại Corps de Mines vào năm 1893 và Tổng thanh tra năm 1910. Đầu năm 1881 cho đến cuối sự nghiệp của mình, ông dạy tại Đại học Paris-Sorbonne. Ông liên tiếp được bổ nhiệm làm giảng viên vật lí cơ học và vật lí thực nghiệm vào năm 1885, Giáo sư Toán học vật lí và xác suất vào năm 1886, và Giáo sư Thiên văn học toán học và cơ học thiên thể vào năm 1896. Ông cũng dạy thiên văn học tại École Polytechnique và điện lí thuyết tại Trường Bưu chính. Ông là thành viên Nha Kinh độ (từ năm 1989). Vào năm 1887, ở tuổi 32, Poincaré được bầu vào Viện Hàn lâm Khoa học Pháp (Académie des sciences) và trở thành Chủ tịch năm 1906. Ông được bầu vào Viện Hàn lâm Pháp (Académie française) vào năm 1909.

Henri Poincaré là hình ảnh tiêu biểu về sự thành đạt trí tuệ và xã hội của thế kỉ 19 đầu thế kỉ 20. Ông cũng là

nhà bac học "xuyên ngành" cuối cùng: như một triết gia về phương pháp luận, ông là tác giả của những công trình kinh điển vé nền tảng phương pháp khoa học, về cơ cấu não trạng của qua trình khám phá; ở vai trò nhà vật lí, ngày nay, ông được coi là đồng tác giả của thuyết tương đối hẹp; với tư cách nhà toán học, bên cạnh David Hilbert, ông được coi là nhà toán học vĩ dại nhất, đồng thời là "bậc thầy phổ quát cuối cùng", bao trùm đại số học lẫn hình học, lí thuyết số và hình học. Chính ông, trong một công trình năm 1895, đã sáng lập ra một ngành mới của hình học mà ông đặt tên là "analysis situs", ngày nay gọi là topo học. Poincaré có hai nghiên cứu sinh tiêu biểu tại Đại học Paris là Louis Bachelier (1870-1946, lí thuyết ức đoán, đóng góp cho toán tài chính) và Dimitrie Pompeiu (1873-1954, tác giả của bài toán Pompeiu).

Ngày 17 tháng 7 năm 1912, ông mất sau một cuộc phẫu thuật không thành công tại Paris, thọ 58 tuổi. Ông được chôn cất tại hầm mộ của gia đình ở nghĩa trang Montparnasse, Paris. Vào năm 2004, Claude Allègre - cựu Bộ trưởng Bộ Giáo dục Pháp - đã đề nghị Poincaré được chôn cất tại Điện Panthéon ở Paris, nơi an nghỉ của những người có cống hiến lớn cho nước Pháp.

2. Giả thuyết Poincaré

Giả thuyết Poincaré là một trong những giả thuyết toán học nổi tiếng và quan trọng bậc nhất, là một trong những thách thức lớn nhất của toan học thế kỉ 20 do Jules Henri Poincaré đưa ra năm 1904. Gia thuyết Poincaré từng làm nhiều bộ óc toán học thế giới của thế kỉ 20 phát

sốt và biết bao chứng minh sai (cũng như những "chứng minh" không được chú ý đến) đã từng được đưa ra. Học viện Toán học Clay đã xếp nó vào một trong bảy bài toán khó của thiên niên kỷ chưa giải được để thách đố thế kỉ 21 với giải thưởng lên đến 1 triệu USD. Bài toán này được Grigori Perelman chứng minh vào năm 2002, 2003. Trong 100 năm tồn tại, nó trực tiếp và gián tiếp đem về bốn Huy chương Fields cho Smale (1966), Thurston (1982), Freedman (1986) và Perelman (2006).

Nhân dịp kỉ niệm 100 năm ngày mất của Henri Poincaré, Nhà xuất bản Tri thức trân trọng giới thiệu với bạn đọc cuốn sách *Giả thuyết Poincaré - Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ,* tác giả Donal O'Shea, do Nguyễn Lương Quang, Vũ Khuê Tâm và Phạm Cao Tùng dịch. Cuốn sách được xuất bản với sự hỗ trợ của Viện Poincaré (Pháp). *Giả thuyết Poincaré - Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ* nói về một bài toán duy nhất như đúng tựa đề, cuộc hành trình 100 năm của nó bắt đầu từ năm 2003, khi được Perelman chứng minh rồi trở về với nguồn cội toán học, triết học của nó khi con người bắt đầu tò mò về vũ trụ và từ đó theo thời gian tuyến tính qua những băn khoăn của chính Poincaré đến những bộ óc vĩ đại khác. Là một cuộc dạo chơi qua các trí tuệ lớn và của các trí tuệ lớn, *Giả thuyết Poincaré - Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ* có thể giúp độc giả chuyên ngành toán học hay độc giả phổ thông tìm thấy nhiều điều thú vị.

Xin trân trọng giới thiệu!

Tháng 7/2012

NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

Lời tựa

Cuốn sách này chỉ bàn về một bài toán duy nhất. Nó được đưa ra bởi nhà toán học kì tài người Pháp Henri Poincaré hơn một trăm năm trước, và kể từ đó đã cuốn hút cũng như làm phật lòng nhiều nhà toán học. Nó chỉ vừa mới được giải quyết. Đối tượng mà giả thuyết Poincaré hướng đến là trung tâm của tri kiến về chính bản thân chúng ta và về vũ trụ mà chúng ta đang sống.

Tôi viết cuốn sách này cho những ai hiếu kì nhưng chỉ còn nhớ rất ít hình học phổ thông, mặc dù tôi cũng hi vọng những người có nền tảng toán học đáng kể sẽ thích nó. Đối với những ai có nhu cầu tìm hiểu thêm thì đã có các phụ chú cuối sách.

Tới bất kì buổi họp mặt nào, ngồi cạnh bất cứ ai trên máy bay, lắng nghe những gì họ nói về toán học: Một vài người yêu thích. Nhưng phần lớn là không, và họ không dành những lời tốt đẹp cho toán. Một số tin rằng mình sinh ra đã không thể làm chủ toán học. Số khác không thích. Nhiều người ghét cay ghét đắng nó, với tình cảm thường chỉ dành cho một cuộc tình đã tan vỡ.

Làm thế nào mà một chủ đề tràn đầy cái đẹp lại làm dấy lên một loạt các phản ứng tiêu cực đến vậy? Sự chán ghét của một vài người dường như bắt nguồn từ nỗi sợ hãi. Tôi không ảo tưởng rằng một cuốn sách sẽ thay đổi

điều này. Nhưng nếu bạn là một người đọc với những cảm xúc chưa rõ ràng về toán học, tôi hi vọng cuốn sách này sẽ truyền cảm hứng để thúc giục bạn đọc thêm những cuốn sách về toán học khác, hoặc, nếu bạn là một sinh viên hay một người đang có ý định học thêm, xem xét việc học thêm một vài ngành toán.

Tôi hi vọng rằng bạn sẽ thích thú khi đọc cuốn sách này cũng như tôi đã thích thú khi viết nó.

1

Cambridge, tháng 4 năm 2003

Những cuộc cách mạng trong toán học thường khá tĩnh lặng. Không xung đột vũ trang. Không tiếng súng. Tin ngắn về chúng nằm xa trang nhất. Chẳng ấn tượng chút gì. Tương tự như buổi chiều thứ hai ẩm ướt ngày 7 tháng 4 năm 2003, tại Cambridge, Massachusetts.

Cử tọa già trẻ tụ họp tại giảng đường của Viện Công nghệ Massachusetts (MIT). Họ ngồi đầy trong phòng họp, giữa các lối đi, và đứng cả ở phía sau. Diễn giả, nhà toán học người Nga, Grigory Perelman, mặc một bộ com lê sẫm màu nhăn nheo, đi đôi giày thể thao đế mềm, bước vào khi được giới thiệu. Rậm râu, đầu hói, lông mày đậm và đôi mắt đen nồng nhiệt, anh thử lại micro rồi bắt đầu một cách do dự: "Vì không giỏi nói chuyện thẳng thắn nên tôi sẽ bỏ qua sự rõ ràng để cho cuộc nói chuyện sinh động hơn". Tiếng cười vui râm ran trong cử tọa và buổi diễn thuyết bắt đầu. Anh nhặt một viên phấn trắng cực lớn để viết một phương trình ngắn có hai mươi năm tuổi

đời[1] Phương trình đó được gọi là phương trình dòng chảy Ricci, mô tả độ cong không gian như một loại nhiệt kì lạ, tương tự dòng dung nham nóng chảy, chảy từ vùng có độ cong lớn và tìm cách lan ra các vùng có độ cong nhỏ hơn.

Perelman mời cử tọa tưởng tượng vũ trụ của chúng ta như một thành phần trong một tập hợp toán học trừu tượng khổng lồ của tất cả các vũ trụ khả dĩ. Anh xem phương trình Ricci như một cách mô tả chuyển động của những vũ trụ khả dĩ này như thể chúng là những giọt nước được đổ xuống từ vùng đồi núi khổng lồ trong một cảnh quan hùng vĩ. Khi một thành phần di chuyển, độ cong thay đổi trong giới hạn vũ trụ mà nó đại diện, và ở một số vùng, độ cong này tiến gần đến một giá trị không đổi. Trong hầu hết các trường hợp, những vũ trụ này phát triển các dạng hình học đẹp đẽ, một số giống với hình học Euclide mẫu mực mà chúng ta đã học ở phổ thông, một số lại rất khác biệt. Nhưng một vài dòng chảy dẫn dắt sự rơi xuống của các giọt nước lại tạo ra vấn đề - các yếu tố di chuyển dọc theo nó tạo ra các vùng xấu về mặt toán học mang tính chia rẽ hoặc tệ hơn. Không vấn đề gì, diễn giả khẳng định, ta có thể di dời những dòng chảy đó; và ông phác thảo phương pháp.

Cử tọa bị thu hút tới buổi nói chuyện qua một bài viết mà Perelman đã đưa lên mạng tháng 11 năm trước. Trong phần cuối cùng của bài viết đó, anh nêu ra một luận điểm mà nếu đúng, sẽ chứng minh được một trong những giả

[1] Phương trình $\partial(g_{ij}) = -2R_{ij}$.

thuyết nổi tiếng nhất, khó nắm bắt nhất, và đẹp nhất của toán học. Được đề ra vào năm 1904 bởi Henri Poincaré, nhà toán học hàng đầu thời đó và cũng là thiên tài của mọi thời đại, giả thuyết Poincaré là một phỏng đoán táo bạo về hình dạng khả dĩ của vũ trụ chúng ta. Nhưng nó chỉ là giả thuyết không hơn. Thách thức của việc chứng minh hay bác bỏ nó đã tạo ra một tiếng kèn lôi kéo các nhà toán học và làm cho nó trở thành bài toán nổi tiếng nhất không chỉ trong hình học và topo học nói riêng mà trong tất cả các ngành toán học. Tháng 5 năm 2000, Học viện Toán học Clay,[2] một học viện dành riêng cho việc phát triển và phổ biến kiến thức toán học, đã liệt bài toán này vào danh sách bảy bài toán thiên niên kỉ và đề ra giải thưởng một triệu đô la cho bất kì ai tìm ra đáp án của nó.[3]

Hơn một nửa cử tọa trong phòng có lẽ đã từng thử lần tìm đường tới đáp án cho giả thuyết Poincaré. Tất cả mọi người trong khán phòng - từ anh chàng tuổi trạc ba mươi có dáng vẻ sinh viên với mái đầu đinh ghi chép bằng tiếng Trung Quốc, cô gái tóc vàng với áo bó và váy ngắn, cho tới người vừa mới chạy bộ mặc quần short rộng thùng thình với áo phông còn đẫm mồ hôi, cụ già khoảng tám mươi với đôi mắt ươn ướt diện áo lạnh xương cá

---

[2] Website của Học viện Toán học Clay: www.claymath.org, có chứa thông tin về nhiệm vụ và chức năng của viện. Thông tin thêm về việc thành lập viện có thể tìm thấy ở "The Millennium Grand Challenge in Mathematics," A. Jaffe, trong tạp chí *Notices of the American Mathematical Society*. 53 (no. 6), 2006: 652-660.

[3] Bài toán thiên niên kỉ nổi tiếng tương đương là "giả thuyết Riemann". Giả thuyết Poincaré và giả thuyết Riemann là hai bài toán được tất cả các nhà toán học công nhận là bài toán thiên niên kỉ.

nhuộm màu phấn trắng của mấy chục năm trên giảng đường - biết rằng họ có thể đang được chứng kiến một sự kiện vĩ đại trong lịch sử ba ngàn năm của toán học. Toán học là một quá trình lao động cần cù từ thời đại này đến thời đại khác, đã trải qua những giai đoạn phát triển rực rỡ cũng như những khoảng thời gian khốn cùng, từ những người Babylon vô danh tìm ra cách tính diện tích hình tròn, cho đến những khám phá mộc mạc nhưng hoàn hảo của Euclid, và hai thế kỉ gần đây là sự trổ hoa của hình học và topo học.

Sau đó hai tuần và nhiều bài giảng khác, tại một cơ sở hàng đầu mang tên Stony Brook của Đại học bang New York, một buổi nói chuyện tương tự lại diễn ra. Giảng đường thậm chí còn đông hơn. Lần này, nhiều phóng viên cũng có mặt trong phòng. Họ được biết rằng Perelman đã thực hiện một khám phá gây choáng váng liên quan đến hình dạng của vũ trụ, và rằng nhờ đó có thể anh sẽ đoạt được giải thưởng một triệu đô la. Họ cũng được biết về sự nghiệp bí ẩn của anh - anh đột nhiên biến mất trong thập kỉ trước, và về tài năng xuất chúng được thừa nhận của anh, về triển vọng chưa được khai thác của anh. Ánh đèn flash lóe sáng. "Đừng", Perelman gắt lên, tỏ rõ sự khó chịu.

Nhà toán học kiên nhẫn trả lời tất cả các câu hỏi từ cử tọa sau bài diễn thuyết của mình. Những câu hỏi khá dữ dội. "Nhưng kết quả sẽ nổ tung trong thời gian hữu hạn", một tiếng nói từ giữa phòng. "Không sao", Perelman trả lời, "ta có thể cắt nó ra và khởi động lại dòng chảy." Sự im lặng, sau đó là một vài cái gật đầu đồng tình. Cử tọa rất

thận trọng, cân nhắc những gì họ nghe. Họ sẽ phải suy ngẫm lời của anh trong nhiều tháng tới, nhưng điều này có vẻ đầy hứa hẹn.

Những ngành toán học mà Perelman viện dẫn chắc là chưa được nghĩ tới ba thập kỉ trước. Các tính toán chuyên môn mà anh sử dụng là mũi nhọn nhất hiện nay và phụ thuộc một cách quyết định vào thành quả nghiên cứu của một số người trong nhóm cử tọa. Bầu không khí căng thẳng. Mọi người đều biết các lập luận của diễn giả rất cao siêu, tinh tế, nhưng cũng rất dễ sai lầm. Ai cũng muốn chúng là đúng đắn. Một trang web[4] được quản lí bởi hai giáo sư, Bruce Kleiner và John Lott, tại khoa Toán học xuất sắc của Đại học Michigan. Trang web có liên kết đến các bài viết của Perelman. Các nhà toán học trên khắp thế giới đã thêm những nhận xét, làm rõ các luận điểm chưa rõ ràng và khai triển thêm những đoạn có vẻ như quá ngắn ngủi.

Hầu hết các nhà toán học, cho dù có nghiên cứu hình học hay không, đều biết đến một ai đó trong buổi diễn thuyết và chờ đợi thông tin từ họ. Phần lớn các cử tọa ghi chú lại bài giảng cho riêng họ và cho bạn bè. Hai trong đó, Christina Sormani, một giáo sư trẻ tuổi tại Lehmann College, và Yair Minsky, một giáo sư mới nổi tại Yale, đã đăng bản ghi chép của họ trên trang web, do đó ai cũng có thể truy cập.

Cũng như tại MIT, tất cả mọi người trong phòng, ngoại trừ các phóng viên, trẻ cũng như già nhận ra rằng

---

[4] www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html.

những gì họ đang lắng nghe là đỉnh điểm của hơn một thế kỉ đơm hoa kết trái tư tưởng toán học trong lịch sử loài người. Bài giảng yêu cầu sự tập trung cao độ, để lại rất ít khoảng trống cho những suy nghĩ vu vơ. Mặc dù vậy, hẳn là nhiều người cũng đang bận tâm tới một sự kiện hoặc bài báo được ấp ủ, rất đặc biệt, gần đây hay lâu rồi, có liên quan đến công trình của Poincaré hoặc của một ai khác đã khuất bóng từ lâu, nhưng chắc chắn tất cả đều rất muốn nghe buổi nói chuyện này. Tất cả đều vui mừng về sự phong phú của những ý tưởng hay, và những hướng đi đầy hứa hẹn còn phải khai phá.

Cánh phóng viên, mặt khác, muốn biết về một triệu đô la. Cảm nhận của Perelman về khả năng đoạt giải? Có thông tin lộ ra là anh không quan tâm đến giải thưởng, vì vậy cánh phóng viên thay đổi cách tiếp cận và viết những câu chuyện về một người Nga sống ẩn dật thực hiện một khám phá toán học vĩ đại, và đoán rằng anh sẽ từ chối giải thưởng. Vài ngày sau đó, Perelman bổ sung thêm một số chi tiết trong các buổi thảo luận được tổ chức vội vàng. Nhưng anh từ chối tất cả các cuộc phỏng vấn với giới báo chí, trở về Saint Petersburg vài tuần sau đó mà không phúc đáp lời mời cộng tác của các trường đại học hàng đầu nước Mĩ.

Giả thuyết Poincaré và chứng minh của Perelman là một trong những thành tựu vĩ đại nhất của thời đại chúng ta. Nó cho chúng ta biết nhiều điều về bản chất và hình dạng khả dĩ của vũ trụ. Phương trình dòng chảy Ricci mà Perelman đã viết, một loại phương trình nhiệt, có họ hàng xa với phương trình Black-Scholes mà những

người giao dịch chứng khoán trên khắp thế giới sử dụng để định giá cổ phiếu va các tùy chọn trái phiếu. Nhưng độ cong phức tạp hơn nhiều so với nhiệt độ hay tiền bạc. Các chương tiếp theo sẽ giải thích độ cong là một đối tượng hình học đòi hỏi nhiều hơn một con số để mô tả nó, và phương trình dòng chảy Ricci mà Perelman sử dụng là sự rút gọn của sáu phương trình có liên quan khác, là một chiến thắng của sự thanh tao, sự đơn giản, nhưng lại chứa đựng một sự phong phú đáng kinh ngạc. Phương trình tương tự gần với nó nhất là phương trình thuyết tương đối rộng thể hiện độ cong không-thời gian của Einstein.

Cuốn sách *Giả thuyết Poincaré* này kể về câu chuyện toán học nằm sau giả thuyết và sự chứng minh nó. Nói chuyện toán học sao cho dễ cảm nhận là phải không chỉ đề cập đến các kết quả, mà cả về những con người mang đến những kết quả đó. Trong tâm thức nhân loại, các thành tựu toán học thường phản ánh một truyền thuyết lãng mạn của một thiên tài đơn độc đã dũng cảm giành giật sự hiểu biết từ một vũ trụ vô cảm. Đúng là có những người mà sự thông tuệ dường như đến từ hư không, đã một mình làm thay đổi môn khoa học này ít nhất là trong vài thập kỉ sau đó. Tuy nhiên, cũng đầy màu sắc và đầy huyền bí giống như các thiên tài, tiến bộ toán học mặt khác lại cũng phụ thuộc vào hàng ngàn cá nhân, và xã hội nơi họ làm việc và sinh sống. Đã đến lúc kể về câu chuyện dài này. Bắt đầu từ Babylon năm ngàn năm trước, đến Saint Petersburg, rồi miền Bắc bang New York, và Madrid. Cuốn sách trên tay các bạn truy tìm lại lịch sử

hình học, sự khám phá ra hình học Phi-Euclid, cũng như sự khai sinh của topo học và hình học vi phân trải qua năm thiên niên kỉ, dưới bàn tay của hàng chục tổ chức xã hội và hàng trăm con người khác nhau. Cuốn sách cũng đề cập đến những khám phá, chiến tranh, các tổ chức khoa học, sự xuất hiện của các trường đại học nghiên cứu ở Đức và gần đây nhất là ở Mĩ.

Phần trình bày toán học được đan xen với các tư liệu về tiểu sử, văn hóa và lịch sử. Với một số người, nội dung toán học có thể là quá nhiều, đối với một số khác thì lại là quá ít. Nhưng chỉ với kiến thức phổ thông trung học, hầu như ai cũng có thể nắm bắt được các khái niệm cơ bản của cuốn sách này, những điểm khó hơn chỉ là một chút thử thách nho nhỏ. Bạn có thể hiểu, thích thú với toán học và giả thuyết nổi tiếng này mà không cần phải tự mình "làm toán học". Để thuận tiện cho người đọc, một bảng chú giải các thuật ngữ toán học, một danh sách các nhân vật, và một danh mục các sự kiện lớn được nêu ra trong câu chuyện được đặt ở phần ghi chú cuối sách.

Một số ngành toán học có nguồn gốc sâu xa trong quá khứ, từ thiên niên kỉ trước. Nghiên cứu toán học là một trong những hoạt động lâu đời nhất của con người, như các nghề mộc, nấu ăn, và luyện kim. Nhưng thực ra, từ sau năm 1900, nhiều ngành toán học khác đã được khám phá, nhiều hơn toàn bộ quãng thời gian trước đó của lịch sử loài người. Do vậy, tốc độ ngày một tăng và sự phụ thuộc vào các ghi chú để biết thêm chi tiết và tư liệu tham khảo cũng sẽ lớn hơn khi câu chuyện tiến gần đến thời gian hiện tại. Hãy nhẹ nhàng lướt qua các phần và

ghi chú mang tính toán học nhiều hơn. Sẽ không có bài kiểm tra nào cả. Bạn có thể trở lại bất cứ chỗ nào bạn muốn để tìm câu trả lời cho những gì có vẻ chưa rõ ràng. Dù sao chăng nữa giả thuyết Poincaré đã làm đau đầu các nhà toán học uyên bác nhất trong một trăm năm qua chứ không riêng gì bạn.

2

Hình dạng Trái Đất

Giả thuyết Poincaré cung cấp các công cụ mang tính khái niệm và công cụ toán học để tư duy về hình dạng khả dĩ của vũ trụ. Nhưng hãy bắt đầu với câu hỏi đơn giản hơn về hình dạng Trái Đất. Bất kì học sinh nào cũng sẽ nói rằng Trái Đất tròn, có dạng hình cầu. Điều này dường như là hiển nhiên trong thời đại ngày nay khi những chiếc máy bay và vệ tinh nhân tạo có thể chụp hành tinh của chúng ta từ trên cao xuống. Tuy nhiên, trong quá khứ, thật khó để khẳng định một cách chắc chắn về hình dạng của Trái Đất.

"Liệu có ai lại điên rồ đến mức tin rằng, ở phía bên kia trái đất, có những người mà chân của họ đối diện với chân của chúng ta: những người đó bước đi với những gót chân ở trên cao còn đầu thì bị treo ở phía dưới?".[5]

---

[5] Đoạn trên trích từ đoạn văn của Irving nói về Lactantius trong *Popular History of the United States* của J. J. Anderson (New York: Clark and Maynard, 1880). Lactantius thực sự tin vào giả thuyết Trái Đất phẳng, nhưng ông chỉ là thiểu số và tác phẩm của ông không có mặt ở Tây Ban Nha năm 1490.

Theo Washington Irving, một trí thức nổi tiếng của nước Mĩ thế kỉ 19, câu hỏi tu từ này của một cha đạo thời xa xưa đã được ban cố vấn của vua Ferdinand và hoàng hậu Isabella trích dẫn để đánh giá đề xuất căng buồm theo hướng Tây qua Đông Ấn của Christopher Columbus. Irving nín thở khi kể lại chi tiết sự hoài nghi, thậm chí sự thù địch của các thành viên ban cố vấn, mù quáng trong niềm tin về một Trái Đất bằng phẳng, đã liên tục thách thức Columbus như thế nào.[6] Một mình đứng trước ủy ban có học vấn uyên thâm, trong lãnh địa của Toà án dị giáo, Columbus đã bảo vệ vững chắc quan điểm của mình.

Bức chân dung Columbus đó của Irving, đã tồn tại và được thuật lại không một chút hoài nghi từ đời này sang đời khác, thực ra là vô nghĩa - "hoàn toàn vớ vẩn" như sử gia uyên bác người Mĩ Samuel Eliot Morison đã viết.[7]

Lucius Caecilius Firmianus Lactantius (khoảng năm 250-325 SCN) là một giáo sư dạy hùng biện tại Nicomedia, sau trở thành một người Thiên Chúa giáo và là thầy của con Constantine Đại đế. Để biết thêm chi tiết, xem bản điện tử của cuốn *Catholic Encyclopedia*, 1917 tại www.newadvent.org/cathen. Tham khảo và danh mục mới từ danh mục trực tuyến của Jackson Bryce tại www.acad.carleton.edu/curricular/CLAS/lactantius/biblio.html.

[6] Washington Irving, *Life and Voyages of Columbus* (London: John Murray, 1830); ấn bản mới hiệu đính bởi J. H. McElroy (Boston: Twayne Publishers, 1981).

[7] Samuel Eliot Morison (1887-1976), nhà văn, sử gia của Harvard, một trong những sử gia nổi tiếng và được yêu thích nhất của nước Mĩ. Ông cho rằng bức tranh Columbus mà Irving vẽ ra là hoàn toàn vớ vẩn, không có thực và sai một cách cơ bản trong cuốn sách *Admiral of the Sea*, vol. 1 (Boston: Little, Brown. 1942). Ngu ngốc

Vào năm 1490, hầu như tất cả những người có học ở phương Tây đều tin rằng Trái Đất là hình cầu. Đương nhiên, còn tồn tại những cuộc tranh luận về có hay không những người sống ở phía bên kia thế giới mà không biết đến Đức Chúa hay đấng Đại Tiên tri. Sự thiếu kiến thức là mảnh đất màu mỡ của các câu chuyện hoang đường. Nhiều người tin vào truyền thuyết về những vùng đất rộng lớn không thể đến được do những cơn bão kinh hoàng. Những câu chuyện ghê rợn về sự tồn tại nhan nhản các loài quái vật ở khắp nơi. Nhưng cũng có một vài người lập luận rằng bên kia bán cầu là một đại dương lớn tuyệt nhiên không có đất liền, không có sự tồn tại của con người.

Columbus không đồng ý với các cố vấn của nhà vua và hoàng hậu, nhưng sự bất đồng của họ xoay quanh kích thước Trái Đất chứ không phải về hình dạng. Tất cả đều tin rằng Trái Đất hình cầu. Mặc dù lúc này đã có một số bản đồ chi tiết rất chất lượng của một vài vùng trên Trái Đất (đặc biệt là vùng biển Địa Trung Hải), được tập hợp thành các atlas, nhưng chẳng ai thực sự có ý tưởng gì về chu vi Trái Đất. Những ước đoán có căn cứ xác thực nhất là của người Hi Lạp cổ đại. Vào thế kỉ thứ hai, Ptolemy ước tính chu vi Trái Đất là 18.000 dặm. Các cố vấn hoàng cung của vua Tây Ban Nha ủng hộ ước tính

---

thấy, mặc dù Morison đã công kích sai lầm của Irving, câu chuyện hoang đường về niềm tin vào một Trái Đất phẳng của các học giả và người có học thời Trung cổ vẫn được nhiều người tin. Cuốn sách của J. B. Russell, *Inventing the Flat Earth: Columbus and Modern Historians* (Westport: Praeger Publishing, 1991) thảo luận rất hay về ảnh hưởng của Irving lên sự tồn tại câu chuyện hoang đường này.

của Erastosthenes, một nhà hình học Hi Lạp của thế kỉ thứ ba TCN: Ông đã đưa ra con số 24.200 dặm cho chu vi của Trái Đất, rất gần với kết quả của hiện nay là 24.902 dặm. Columbus lập luận rằng Trái Đất thậm chí còn nhỏ hơn so với tính toán của Ptolemy. Các cố vấn đã có lí chứ không phải Columbus. Nếu quan điểm của các cố vấn chiếm ưu thế, Columbus sẽ không nhận được hỗ trợ tài chính, vì chi phí cho một cuộc viễn dương dài ngày hơn và ẩn chứa một độ rủi ro cao hơn sẽ không được cho phép.

Danh tiếng của Columbus thăng trầm theo dòng thời gian. Ban đầu ông được ca ngợi cho sự khôn ngoan, can đảm, tầm nhìn và ngay cả ngoại hình. Trong dịp kỉ niệm 500 năm chuyến du hành của ông, một số đánh giá khác, đen tối hơn, được đưa ra: Columbus là một tên đế quốc tham lam, cứng đầu, được hưởng lợi từ may mắn trời cho. Nhà thám hiểm thực sự đã gặp may khi mà châu Mĩ nằm đúng ở vị trí của nó. Tuy nhiên, ông cũng biết khai thác lượng thông tin sẵn có thời đó một cách chính xác. Ông nghe đồn về các chuyến thám hiểm của người Bắc Âu và của nhà hàng hải Ailen, Brendan. Nếu họ đã đặt chân đến châu Á, giả thuyết có vẻ hợp lí, thì Erastosthenes và Ptolemy cả hai đã sai lầm. Vào thời đó, điều này đương nhiên là hợp lí hơn so với giả thuyết là có một lục địa chưa được khám phá nằm giữa châu Âu và châu Á. Hơn thế nữa, vô số dữ liệu mà Ptolemy sử dụng chứa đựng nhiều sai sót.

Cho đến khi chết, Columbus vẫn tin rằng ông đã đặt chân lên quần đảo Spice ở phía Đông của Ấn Độ. Ông

biết rằng để đến được đó bằng cách đi vòng quanh châu Phi sẽ mất thời gian hơn rất nhiều và ông đã phải đấu tranh để dung hòa giả thuyết này với các quan sát của riêng mình. Ông viết: "Tôi thấy rằng Trái Đất không tròn như nó vốn được miêu tả, mà có hình dạng một quả lê, tròn ở khắp nơi ngoại trừ phần gần cuống bên ngoài, hay nó có thể có hình dạng quả bóng tròn với một cái gì đó giống với núm vú phụ nữ ở một nơi, phần nhô ra này là điểm cao nhất và gần thiên đàng nhất."

Đoạn viết này thường bị chế nhạo, nhưng nó đem lại khá nhiều cảm hứng cho tôi.[8] Ở đây ta thấy một ông già, người đã tin và dành cả cuộc đời để chứng minh Trái Đất là một hình cầu hoàn hảo, song vẫn sẵn sàng đón nhận các giả thuyết khác phù hợp với dữ liệu hơn. Có lẽ, ông đã lập luận rằng Bắc Bán cầu thu hẹp lại giống như phần gần cuống của quả lê còn Nam Bán cầu phình ra như phần dưới của quả lê. Nên ta có thể đi tới quần đảo Spice tương đối nhanh bằng cách dong buồm quanh chiếc cổ hẹp của Bắc Bán cầu, trong khi đó, việc đi vòng quanh châu Phi qua vùng Nam Bán cầu to hơn sẽ làm khoảng

---

[8] Được trích từ *Early Man and the Ocean: A search for the Beginnings of Navigation and Seaborne Civilizations* (Garden City, NY: Doubleday, 1979), trang 147 của T. Heyerdahl. Đoạn này được dịch từ bản tiếng Đan Mạch của C. V. Ostergaard của trang 10 cuốn sách *Giornale di Bordo di Cristoforo Columbo* 1492-93 của Caddeo. Heyerdahl lưu ý rằng giả thuyết của Columbus rất có lí vì Columnbus tin người Viking đã có mặt ở phía Bắc của châu Á. Do đó ông đã đến quần đảo Spice ở Đông Ấn bằng cách căng buồm theo đường tắt dọc trên phần trên Bắc bán cầu của Trái Đất hình quả lê thay vì đi vòng quanh vùng phình ra ở Nam Bán cầu.

sườn núi Karvounis hoặc Kerkis, chỉ gợi lên sự lười biếng ấm áp và sự uể oải đời đời. Lái xe hoặc đạp xe đạp khoảng tám dặm về phía nam của thị trấn Samos ngày nay sẽ dẫn ta đến một thị trấn có tên gọi Pythagoreion. Thị trấn mang tên của Pythagoras, công dân nổi tiếng nhất của Samos, nằm trên một phần của thành cổ Samos đã bị chôn vùi. Rẽ sang trái tại một ngã ba trên đường và tiếp tục đi dọc bờ biển, trên gò cao là một thung lũng với những tàn tích của Heraion, đền thờ thần Hera, một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Trong 155 cột trụ đã từng được dựng lên nơi đây, giờ chỉ còn sót lại một cột duy nhất cao bằng nửa chiều cao ban đầu đứng trên một nền đá lớn. Gần đó là đường hầm dẫn nước Evpalinos, bây giờ được mắc đèn sáng trưng và mở cửa cho công chúng. Quá khứ hùng vĩ áp đảo hiện tại mờ nhạt.

Tiếp tục 20 dặm từ tàn tích của ngôi đền dọc con đường chính dẫn đến thị trấn Marathokampos trên đỉnh đồi ở phía tây. Một bảng hiệu nhỏ đánh dấu con đường mòn đi bộ lên núi Kerkis và một hang động nơi Pythagoras đã từng dạy học. Ngược lên dốc là một hang động râm mát và một hang ngầm rộng rãi. Đi bộ xuống dưới một chút, dốc đá của dãy Kerkis và màu xanh thẳm của biển Aegean dường như trải dài đến vô tận. Sự hoang vu, vẻ đẹp, và sự tịch mịch gợi nhớ đến hình ảnh của dãy núi Skellig ở Ailen hoặc sườn dốc phía đông của ngọn núi lửa thiêng liêng Haleakala trên đảo Maui thuộc quần đảo Hawaii. Tại những nơi như vậy, hiện tại mong manh và quá khứ dường như xích lại gần nhau. Tiếng người xưa như vọng lại thì thầm bên tai. Chính nơi đây Pythagoras

lần đầu tiên giảng giải rằng Trái Đất là một hình cầu. Người địa phương nói linh hồn ông vẫn còn vương vấn đâu đây. Trong các đêm tối khi gió thổi vào dãy núi Kerkis đến rát cả mặt, họ kể về quầng ánh sáng mờ nhạt phát ra từ các phiến đá dẫn đường cho những người đi biển từ đằng xa.

Ánh sáng đó rực cháy 2.500 năm trước trong thời hoàng kim của Samos, lúc đó là một thành phố quan trọng của thành quốc Ionia. Khu vực nhỏ bé này bao gồm bờ biển nằm ở cực Tây của Thổ Nhĩ Kì, hay còn gọi là Tiểu Á, kéo dài từ Phocaea, khoảng một trăm dặm về phía nam cho đến Miletus, cùng với các đảo Aegean cách không xa đất liền. Dân gian truyền rằng người Hi Lạp đã chiếm đóng khu vực này vào đầu thiên niên kỉ thứ nhất TCN. Chính tại nơi đây, nền kinh tế, văn hóa Hi Lạp nhanh chóng hồi phục sau Kỉ nguyên Đen tối, quãng thời gian gần 500 năm suy giảm dân số, kinh tế khó khăn, chữ viết bị lãng quên sau cuộc hủy diệt tàn bạo vẫn còn nằm trong vòng bí ẩn của nền văn minh Mycenaen vào thế kỉ 12 TCN.

Các tác phẩm của những công dân Ionia như Homer và Hesiod đánh dấu sự trỗi dậy của thời đại Phục hưng. Chữ viết, dựa vào bảng chữ cái có nguồn gốc từ Phoenicia (Lebanon ngày nay) đã bắt đầu được sử dụng cuối thế kỉ thứ chín TCN, và được Homer kịp thời sử dụng để viết sử thi. Giữa thế kỉ thứ bảy và thứ năm TCN, Samos trở thành một thế lực hải quân lớn mạnh, và trên đất liền của Ionia là những thành quốc quan trọng, những trung tâm thương mại sầm uất. Triết học và khoa học Hi Lạp trỗi dậy ở Ionia vào cùng thời điểm này.



Hình 1. Ionia.

Nhờ vị trí của Ionia trên rìa Tiểu Á, mà các nhà tư tưởng của Ionia có cơ hội tiếp xúc với các nền văn minh lớn khác của miền Đông Địa Trung Hải, đặc biệt là Ai Cập. Xa xa về phía đông là Babylon huyền thoại, hay xa hơn nữa là Ba Tư. Hai nhà triết học vĩ đại sinh trưởng tại Miletus của Ionia là Thales (624-547 TCN) và Anaximander (611-545 TCN) đã dạy rằng vũ trụ và chuyển động của các vì sao tuân theo các quy luật tự nhiên, chứ không bị chi phối bởi ma thuật hay sự can thiệp độc đoán của các vị thần. Vũ trụ có trật tự của nó, và ta có thể hiểu được nó thông qua lí luận và suy luận logic. Đây là một ý tưởng rất mới, đòi hỏi khá nhiều thời

gian để nắm bắt, và có ảnh hưởng thăng giáng tùy theo những địa điểm, những thời điểm khác nhau.

Thales và Anaximander cũng suy đoán về hình dạng của Trái Đất. Thales chấp nhận niềm tin của người Ai Cập cho rằng Trái Đất nhô lên như một ngọn núi từ một đại dương phẳng lặng và vô tận. Anaximander nghĩ về vấn đề sâu hơn một chút, tin rằng Trái Đất là một ống xi lanh treo lơ lửng trong không gian.

Pythagoras (569-475 TCN) khao khát hiểu biết về tôn giáo và sự huyền bí nhiều hơn các triết gia khác của Ionia. Cha của ông, Mnesarchus, một thương nhân đến từ thành quốc giàu có Tyre, chuyển từ Phoenicia đến Ionia, nơi ông đã gặp và kết hôn với Pythais của xứ Samos. Tương truyền rằng Mnesarchus đã được cấp quyền công dân trên Samos sau khi quyên góp lương thực cho đảo trong một nạn đói. Pythagoras du lịch khắp nơi cùng cha,



Hình 2. Ionia, Ai Cập và Phía Đông.

gặp mặt các học giả người Syria và Chaldea trong một chuyến đi trở lại Tyre, đến cả Ý và Hi Lạp. Ông là một thần đồng, sớm bộc lộ mối quan tâm đặc biệt đến triết học, môn học mà ông được bồi dưỡng bởi người thầy của mình - Pherekydes (600-550 TCN), và bởi Thales và Anaximander. Khi gặp Pythagoras, Thales đã là một ông già thông thái, nổi tiếng và được kính trọng trên khắp lãnh thổ Ionia. Thales từng sống ở Ai Cập thời trẻ, và chính ông, như một định mệnh, đã khuyến khích Pythagoras cũng nên đến đó.*

Tại Ai Cập, bằng cách nào đó Pythagoras đã được tham gia vào những nghi lễ thần thánh của người bản xứ. Đến nay người ta vẫn không hiểu làm sao mà một người nước ngoài như Pythagoras lại được phép học các nghi lễ rất bí ẩn này. Tuy nhiên, tất cả các sử liệu đều cho rằng có lẽ nhờ chân ông có một cái bớt vàng bẩm sinh mà các giáo sĩ Ai Cập tin rằng ông được che chở bởi thần Osiris của họ, và do đó cho phép ông tham gia vào các hoạt động cúng tế. Chắc chắn là sau đó cuộc đời của Pythagoras đã được gắn với nhiều lời đồn đại, rằng một nửa trong ông là thần linh và đã được thần Osiris chạm vào, những lời đồn mà ông có vẻ như chẳng làm gì nhiều để phản bác. Chi tiết về những năm tháng của ông ở Ai Cập thậm chí còn lộn xộn hơn so với cả phần còn lại của cuộc đời ông. Dường như ông đã bị bắt, có lẽ trong cuộc xâm lược Ai

---

* Mặc dù có một số sách tiểu sử Pythagoras, mà chi tiết cuộc đời ông vẫn còn rất mù mờ và trái ngược. Xem ví dụ như P. Gorman, *Pythagoras: A Life* (London, Boston: Routledge and K. Paul, 1979).

Cập của người Ba Tư năm 525 TCN và bị dẫn giải như một tù binh từ Ai Cập đến Babylon xa xôi, cách Baghdad ngày nay 55 dặm - thành phố giàu nhất thế giới lúc đó. Ở đó ông đã học được những điều huyền bí của thuyết nhị nguyên Ba Tư, tiếp thu giáo lí của Zarathustra (được người Hi Lạp biết đến như Zoroaster). Pythagoras có lẽ cũng đã học được rất nhiều về toán học tại Babylon. Toán học Babylon phát triển cao hơn nhiều so với Ai Cập (cũng có nguồn gốc từ Babylon), và mặc dù có khá nhiều tranh luận về trình độ toán học của Thales, nhưng Pythagoras hiểu biết hơn và đã đạt đến một trình độ cao hơn trong lĩnh vực này.[10]

Sử liệu về việc phóng thích Pythagoras ở Babylon đã bị thất lạc, nhưng câu chuyện thuật lại chuyến hồi hương trở lại Samos thì không. Với vẻ bề ngoài ấn tượng trong quần thụng và y phục phương Đông để che giấu cái bớt vàng ở chân, với tài năng hùng biện hết sức lôi cuốn, ông đã tạo nên những cảm xúc mạnh cho người dân. Lời dạy của ông đan xen một cách hoàn hảo những tư duy lí trí và phi lí trí, khoa học và thần bí, tương phản rõ rệt với sự điềm đạm của trường phái triết học Ionia. Sự lôi cuốn này

[10] Tham khảo lịch sử toán học Ai Cập và Babylon qua các sách sau: O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity* (Princeton: Princeton University Press, 1952) và B. L. van der Waerden, *Science Awakening I: Egyptian, Babylonian, and Greek Mathematics*, A. Dresden dịch và bổ sung (Leyden: Noordhooff, 1975). *Mathematical Cuneiform Texts* của Neugebauer (New Haven: American Oriental Society, 1945) và *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften* của *O. Neugebauer* (Berlin, New York: Springer-Verlag, 1969) chứa thêm nhiều thông tin hỗ trợ.

dường như vẫn còn tồn tại đâu đó trong khu vực hoang tàn quanh hang động của ông trên đảo Samos.

Khoảng năm 530 TCN, Pythagoras và một số đồ đệ chuyển đến Croton, một thuộc địa yên tĩnh của Hi Lạp ở phía Nam nước Ý, thành phố được thành lập gần hai thế kỉ trước, và lúc đó có thể là trung tâm của sự phục hồi về tôn giáo đang lan rộng ra cả vùng. Tại đó, Pythagoras thành lập trường học của riêng mình. Trên thực tế, nó giống một nơi tụ họp anh tài hơn là một trường học, với cái tên dễ gây ra sự nhầm lẫn, vì đây là hội của những người có cùng chí hướng tìm kiếm chân lí, thu nhận cả phụ nữ. Với tên gọi là hội "bán nguyệt", được phân thành 2 nhóm: nhóm nội đồ bao gồm một số đàn ông và phụ nữ được gọi là *mathematikoi*, thực hành ăn chay nghiêm ngặt, sống chung, hoàn toàn không có sở hữu cá nhân và được giảng dạy bởi chính người thầy vĩ đại. Nhóm ngoại đồ được gọi là *akousmatics*, sống tại gia và giữ ít quy tắc nghiêm ngặt hơn. Các thành viên phải trải qua các nghi thức nhập hội và tuyên thệ giữ bí mật.

Những người theo trường phái Pythagoras tin rằng ở cấp sâu nhất của tự nhiên, thực ra chính là toán học, mọi thực thể tương quan với nhau, triết học có thể được sử dụng như một phương tiện để làm trong sạch tâm hồn, và linh hồn có thể thoát lên hoà nhập với giới thần tiên. Sức hấp dẫn của ý niệm của trường phái này về sự tương quan của vạn vật, sự pha trộn kì lạ của tính huyền bí Đông phương và tư tưởng Hi Lạp làm mê hoặc những người đương thời. Pythagoras và trường phái của mình thành công rực rỡ và trở nên nổi tiếng khắp Hi Lạp.

Thời gian đã làm lắng xuống các cuộc tranh luận dữ dội về tính cách của Pythagoras cũng như các truyền thuyết xung quanh ông. Cách nói chuyện của ông có sức hút đặc biệt và dân chúng thường đồn đại rằng ông nhớ hết chi tiết từ tiền kiếp của mình. Đối với người hâm mộ, ông là một thiên tài với kiến thức, trí thông minh sâu sắc phi thường, sự lịch duyệt và lòng trắc ẩn vô biên. Đối với những người chống đối, ông là một tên khoác lác với bản tính tự đề cao mình. Dù sự thật thế nào đi nữa, Pythagoras là người có ảnh hưởng vô cùng lớn, uy tín trường phái của ông thực sự tăng lên rất nhiều sau khi ông chết.

Điều quan trọng nhất là Pythagoras đã dạy cho chúng ta biết Trái Đất có dạng hình cầu. Ông đã bắt đầu thu thập bằng chứng củng cố cho ý tưởng của ông, và cũng là người đầu tiên quan niệm Trái Đất tồn tại cùng với các ngôi sao trong một vũ trụ duy nhất. Những học trò sau này, mà đáng chú ý nhất là Philolaus (470-385 TCN) thậm chí từ bỏ khái niệm về một vũ trụ địa tâm, rao giảng rằng Trái Đất, Mặt Trời, và các ngôi sao quay quanh một ngọn lửa vô hình trung tâm.

TỪ PYTHAGORAS ĐẾN COLUMBUS

Giờ đây chúng ta đã biết quan điểm cho rằng bề mặt Trái Đất là một hình cầu có nguồn gốc từ đâu và khi nào. Nếu những người theo trường phái Pythagoras đã tuyên thệ giữ bí mật, thì tại sao những kiến thức này bị rò rỉ ra

ngoài? Và một khi đã bị rò rỉ, tại sao nó lại được đánh giá một cách hết sức nghiêm túc, và làm sao mà thông tin này lại được truyền đến tận thời nay?

Điều đầu tiên cần biết là bản tính con người không thay đổi quá nhiều trong ba thiên niên kỉ qua. Chúng ta đều bị thu hút bởi các sự kiện huyền bí, và rất ít người có khả năng cưỡng lại vẻ quyến rũ của một kiến thức lớn được giữ bí mật. Hãy xem thành công của cuốn tiểu thuyết và bộ phim "Mật mã Da Vinci" gần đây. Tầm nhìn xa của trường phái Pythagoras đảm bảo một thị trường cho các cuốn sách với mục đích tìm hiểu những khái niệm và niềm tin của họ. Rất nhiều trong số chúng đã được xuất bản. Philolaus bị nghi ngờ đã viết cuốn sách *Về thiên nhiên* chỉ vì tiền.

Nhà triết học vĩ đại Plato (427-347 TCN) ảnh hưởng từ trường phái Pythagoras khá nhiều. Ông mua cuốn sách của Philolaus cho Viện Hàn lâm, trường học do ông thành lập tại Athens. Ông cũng là bạn rất thân của nhà toán học hàng đầu theo trường phái Pythagoras, Archytas (khoảng 428-350 TCN). Kết quả là, nhiều ý tưởng của Pythagoras đã đi vào hệ thống tư tưởng của Plato và hệ tư tưởng Hi Lạp thời đó. Môn đệ xuất sắc nhất của Viện Hàn lâm là Aristotle (384-322 TCN), mặc dù ít say mê các lí thuyết của phái Pythagoras (ông nổi tiếng vì đã coi họ là những người "ăn chay bẩn thỉu"), ông cũng đưa khá nhiều ý tưởng của họ vào chính công trình vĩ đại của mình.

Tầm ảnh hưởng của tư tưởng Aristotle lớn đến mức mà người ta khó có thể phóng đại thêm nữa. Ông soạn lại các quy tắc của logic hình thức, hệ thống hóa triết học, và

đóng góp vào tất cả các ngành của khoa học tự nhiên. Ông giảng giải rằng Trái Đất là một hình cầu mà Mặt Trời và Mặt Trăng quay xung quanh. Các tác phẩm của ông về đạo đức, mĩ học, và chính trị vẫn còn được đọc cho đến ngày nay. Tư tưởng thời Trung cổ, cả Thiên Chúa giáo lẫn Hồi giáo đều bắt nguồn từ các nguyên lí của Aristotle. Quan điểm Trái Đất là hình cầu đã đứng vững được nhờ sự ủng hộ bởi uy quyền của Plato và Aristotle, và bởi những khám phá mà tôi sẽ mô tả sơ qua.

Vai trò của Aristotle là thầy giáo riêng của Alexander Đại đế,[11] người có quyền lực nhất trên thế giới lúc bấy giờ, cũng đã góp phần truyền bá ý tưởng của Pythagoras mạnh mẽ hơn, mặc dù ít trực tiếp hơn các bài giảng của ông. Với nền tảng là cuộc chinh phục Hi Lạp của cha năm 338 TCN, Alexander đã tiến lên chinh phục toàn bộ thế giới được biết đến thời đó. Cho đến khi Alexander mất vào năm 323 TCN, đế chế của ông kéo dài từ khu vực xung quanh Địa Trung Hải cho đến Ấn Độ.

Dù rằng các dữ kiện kể về sự phức tạp trong mối quan hệ giữa ông giáo Aristotle và cậu học trò tài năng Alexander đã thất lạc hoàn toàn, không nghi ngờ gì về việc Aristotle đã thỉnh cầu Alexander sử dụng các chiến dịch hành quân cho các quan sát khoa học. Không biết đề nghị đó có được chú ý đến hay không nhưng Alexander đã đem theo các họa sĩ vẽ bản đồ trong các chiến dịch của mình. Tất cả bản đồ đó đã thất lạc nhưng

---

[11] Cha của Alexander Đại đế, Phillip xứ Macedon, kết thúc cuộc xâm lược Hi Lạp vào năm 338 TCN, đã mời Aristotle làm thầy giáo riêng cho con mình.

các văn bản viết tay của một số tướng lĩnh thì vẫn còn, những miêu tả và đánh giá của họ trở thành nguồn dữ liệu cơ bản để vẽ lại bản đồ vài trăm năm sau.

Sau cái chết của Alexander Đại đế, đế chế của ông tan rã. Phần lãnh thổ lớn nhất rơi vào tay tướng của ông, Ptolemy Soter Đệ nhất, người đã đóng đô tại Alexandria nơi cửa sông Nile. Chính tại nơi đây, tại thành phố đầu tiên và lớn nhất trong những thành phố do Alexander Đại đế xây dựng và mang tên ông, Ptolemy bắt tay vào xây dựng thư viện huyền thoại để đảm bảo vị trí thủ đô trí tuệ và văn hóa của thế giới cho Alexandria. Các học giả đổ xô vào đại thư viện này, với mong muốn nghiên cứu các bộ sưu tập gồm hàng trăm ngàn cuốn sách và văn bản ghi trên những cuộn giấy, da. Chức vụ Tổng giám thư viện có lẽ là vị trí hàn lâm cao nhất mà một người có thể đạt được trong thế giới cổ đại, tương tự như chức Viện trưởng Viện Hàn lâm Athens của Plato hay chức Hiệu trưởng Đại học Harvard hoặc chức Giám hiệu Trinity College (của Đại học Cambridge) ngày nay.

Eratosthenes (275-195 TCN) xứ Cyrene (ngày nay là Shahhat nước Libya) đã trở thành Tổng giám thư viện đời thứ ba vào năm 235 TCN trong triều đại Ptolemy Đệ nhị. Eratosthenes đã từng học địa lí tại Athens nhưng đồng thời ông cũng làm thơ, viết phê bình văn học, và theo đuổi những công trình toán học, thiên văn học, triết học. Ông tuyệt nhiên không nghi ngờ gì về giả thuyết Trái Đất là một hình cầu - ông đã viết rằng nếu căng buồm từ Tây Ban Nha về phía Tây ta sẽ gặp Ấn Độ. Ông thậm chí còn vẽ bản đồ của hành trình này.

Nhưng ông nổi tiếng nhất với nhận xét rằng hai người ở cách xa nhau nhiều dặm, một người ở phía chính Bắc của người kia, sẽ nhìn thấy Mặt Trời dưới những góc độ khác nhau trong cùng một thời điểm trong ngày; đồng thời ông cũng chỉ ra rằng, giả sử Trái Đất là một hình cầu, ta có thể sử dụng sự chênh lệch của các góc này để ước lượng chu vi của thế giới. Eratosthenes đã đo được độ chênh lệch về số đo góc giữa Alexandria và một địa điểm tương ứng với Aswan ngày nay, 486 dặm về phía Nam sông Nil, vào lúc giữa trưa, và qua đó đã tính toán được chu vi của Trái Đất với độ chính xác tuyệt vời mà một vài người chống lại Columbus đã sử dụng kết quả đó tại hoàng cung Tây Ban Nha sau này.[12] Vài thế hệ sau, Hipparchus (190-120 TCN) đề xuất ý tưởng Trái Đất quay vòng quanh Mặt Trời, và thiết lập hệ thống đo lường dựa vào vĩ độ và kinh độ, chia Trái Đất thành 360 độ.

Alexandria tiếp tục là (thánh địa) ngôi nhà lớn của các nhà địa lí, toán học, và thiên văn học ngay cả sau khi thư viện vĩ đại này bị tiêu hủy.[13] Người xuất chúng nhất

---

[12] Eratosthenes đo chu vi Trái Đất khoảng 250.000 stadium. Nếu như một stadium là 157,2 m (tỉ lệ này do Pliny tính toán), kết quả của Eratosthenes chỉ sai 3 phần trăm: 24.200 dặm so với 24.902 dặm.

[13] Thời gian thư viện Alexandria bị tàn phá vẫn chưa được chính xác cụ thể và vẫn đang còn được tranh luận. Hầu hết các học giả đồng ý rằng thư viện bị tàn phá trong cuộc chiến tranh nhân dân trong thời cai trị của vua Aurelian vào thế kỉ thứ ba mặc dù theo một số ý kiến khác, như Plutarch, thì thư viện bị tàn phá do lệnh đốt cảng Alexandria của Caesar Đại đế hai thế kỉ trước đó. Thư viện anh em ở ngôi đền Serapeum gần đó bị tàn phá không lâu sau năm 391 theo lệnh của vị vua theo Thiên Chúa giáo Theodosius.

trong số đó là Claudius Ptolemy (85-165). Cuốn sách *Địa lí* (Geography) của ông ta là cả một hệ thống khổng lồ: một cuốn sách bao gồm tất cả tri thức của người xưa, có thẩm quyền trên mọi địa hạt và đã trở thành tiêu chuẩn tuyệt đối. Ptolemy thảo luận các vấn đề trong việc lập bản đồ của Trái Đất cong lên một mảnh giấy phẳng và các phương án khả dĩ để chiếu một mặt cầu xuống một mặt phẳng. Ông chỉ ra rằng một khi ta liên hệ được các tọa độ (trong trường hợp này là kinh độ và vĩ độ) với các vị trí cần vẽ bản đồ, ta có thể vẽ lại bất cứ bản đồ nào tùy thích. Dựa vào các văn bản sót lại của các tướng sĩ của Alexander và dữ liệu thu thập được bởi các nhà du hành khác, Ptolemy tính toán kinh độ, vĩ độ cho tất cả những nơi đã từng được biết đến.

Các bản đồ trong bản gốc của cuốn sách *Địa lí* đã thất truyền. Tuy nhiên, điều đó không quan trọng lắm. Văn bản này của ông vô cùng thông tuệ và độc giả ngày nay vẫn học được nhiều điều trong đó.[14] Nhìn chung, Ptolemy tưởng tượng rằng, sự sống trên Trái Đất tồn tại trên khoảng một nửa hành tinh, từ bờ biển Tây Âu đến Ấn Độ và xa hơn nữa. Ông ước tính chu vi Trái Đất khoảng 18.000 dặm, ít hơn nhiều so với kết quả của Eratosthenes, nhưng lớn hơn của Columbus.

Hầu hết mọi người đã lãng quên cuốn *Địa lí* của Ptolemy trong nhiều năm, ngoại trừ một số nhà khoa học

[14] Một bản dịch tiếng Anh rất hay: *Claudius Ptolemy: The Geography*, của E. L. Stevenson, được tái bản bởi Nhà xuất bản Dover (New York: Dover, 1991).

Hồi giáo. Tại Palermo, trong triều đình đa văn hóa của vua Norman Roger Đệ nhị, al-Idrisi (khoảng 1100-1165) sử dụng một bản dịch tiếng Arập tác phẩm vĩ đại này và hoàn thiện các tính toán của Ptolemy. Còn nguyên bản bằng tiếng Hi Lạp thì bị thất lạc cho đến khi một thầy tu của vương quốc Byzantine, Maximos Planudes (khoảng 1260-1330), tìm thấy một bản sao chép bằng tay không có bản đồ. Planudes tự tay vẽ lại một số bản đồ và ủy thác người khác vẽ lại các bản đồ còn lại. Năm 1406, văn bản này được dịch sang tiếng Latin, một thầy tu dòng Benedictine, Nicolas Germanus, đã vẽ lại tất cả bản đồ dựa vào phép chiếu hình thang, một trong ba phương pháp do Ptolemy đề xuất.[15] Loạt bản đồ này là cơ sở cho bản in đầu tiên của tập bản đồ của Ptolemy, được xuất bản năm 1477 tại Bologna với 500 ấn bản. Columbus sở hữu một bản và nghiên cứu nó một cách cẩn thận.

Quan điểm của Pythagoras đã được truyền đi một cách thành công qua Plato, Aristotle, các nhà địa lí uyên bác của Alexandria, Sicily, cho đến thời kì đầu Trung cổ. Vào thời Columbus, hầu như tất cả mọi người tin rằng Trái Đất là hình cầu. Có quá nhiều bằng chứng ủng hộ cho niềm tin này. Nếu ta đứng tại các địa điểm khác nhau trên đường Bắc Nam, ta sẽ nhìn Mặt Trời dưới những góc khác nhau. Khi một con tàu từ rất xa tiến dần vào trong tầm nhìn của ta, cột buồm là vật đầu tiên mà ta nhận ra,

[15] Việc dịch tác phẩm của Ptolemy từ tiếng Hi Lạp sang tiếng Latin được bắt đầu bởi học giả người Byzantine, Emanuel Chrysoloras (1335-1415) và được hoàn tất bởi học trò của ông, Jacopo d'Angelo vào năm 1406.

tiếp theo là phần còn lại của con tàu. Thủy triều, đêm và ngày, các tuần trăng khác nhau, và nhiều hiện tượng tự nhiên khác sẽ được giải thích hợp lí hơn nhờ luận điểm Trái Đất là một hình cầu.

HÌNH DẠNG TRÁI ĐẤT

Niềm tin là một chuyện, nhưng thực sự chúng ta biết chắc chắn thế giới có dạng hình cầu từ khi nào? Ta đã thấy rằng Columbus bắt đầu nghi ngờ lí thuyết hình cầu, cho rằng hình dạng Trái Đất giống như một quả lê. Và ngày nay ta biết rằng hành tinh của chúng ta không phải là một hình cầu có độ cong tròn hoàn hảo, mà hơi phẳng hơn một chút ở hai cực. Nhưng, như chúng ta sẽ thấy, có nhiều khả năng khác căn bản hơn nhiều: hình dạng Trái Đất là câu hỏi rất phức tạp chứ không đơn thuần chỉ là vấn đề về các vùng lồi cong ra hay dẹp phẳng vào.

Phải chờ cho đến khi tất cả các vùng trên Trái Đất được khảo sát và lập bản đồ một cách cẩn thận thì kiến thức của nhân loại về hình dạng Trái Đất mới trở nên chắc chắn. Hai thế kỉ sau thời đại Columbus đã chứng kiến sự ra đời của các tập bản đồ (atlas) Trái Đất bao quát hơn bao giờ hết. Chúng góp mặt trong số những cuốn sách quý giá nhất và được tìm kiếm nhiều nhất qua mọi thời đại. Tập bản đồ Ptolemy mà Columbus sử dụng được tái bản tại Rome vào năm 1508 bởi Berandus Ventus de Vitalibus. Đây là ấn bản đầu tiên bao gồm chi tiết các chuyến du hành của người châu Âu tới thế giới mới và

xung quanh mũi Hảo Vọng[1n]. Tập bản đồ thế giới này cũng bao gồm luôn một châu Mĩ nhỏ.

Jacobus Pentus de Leucho, xứ Venice, tái bản công trình của Ptolemy dưới tên gọi *Liber Geographicae* (Địa lí tự do) năm 1511, với 28 bản đồ và được hiệu đính kĩ lưỡng bởi Bernardus Sykvanus, xứ Eboli. Abraham Ortelius, nhà địa lí của vua Tây Ban Nha Philip Đệ nhị, xuất bản cuốn *Theatrum Orbis Terrarum* (Sân khấu của thế giới) năm 1570. Cuốn sách này được tái bản nhiều lần, nhưng có nhiều vùng rộng lớn vẫn để trống và tỉ lệ hầu hết không chính xác.

Một người bạn của Ortelius, Gerhard Mercator xứ Rupelmonde, người Bỉ và là nhà địa lí giỏi nhất kể từ sau Ptolemy, làm một cuộc cách mạng trong ngành vẽ bản đồ bằng cách giới thiệu một phép chiếu bản đồ (ngày nay được gọi là phép chiếu Mercator) cho phép các nhà hàng hải vẽ sơ đồ cho các chuyến ra khơi không thay đổi **góc giữa kinh tuyến và hành trình (xem ghi chú trong Chương 8)**. Các tập atlas dựa trên công trình của ông và các cuộc du hành tiếp sau đó của các nhà thám hiểm châu Âu bắt đầu xuất hiện tại Amsterdam vào cuối thế kỉ 16. Từ *atlas* được dùng để chỉ các tập bản đồ được bắt nguồn từ thói quen của Mercator mở đầu các tập bản đồ bằng hình ảnh vị thần Hi Lạp Atlas cõng trái đất trên vai.

Bộ sách in đắt nhất, nổi tiếng nhất của thế kỉ 17 là bộ sách nhiều tập *Atlas Major* (Đại Bản Đồ) của Joan Blaue được xuất bản bằng bốn ngôn ngữ trong năm 1662-1663.

[1n] Thuộc Nam phi và cũng là cực Nam của lục địa châu Phi (ND).

Mặc dù trình bày tuyệt đẹp, quyển sách có quá nhiều sai sót (một số không thể tha thứ được ngay cả trong thời kì đó) và khoảng trống.

Mặc dù không ai tin rằng Trái Đất vô tận, hoặc tệ hơn, Trái Đất chỉ giới hạn trong chừng đó lãnh thổ đã được xác định, phải đợi đến khi đoàn thám hiểm Magellan trở về năm 1522 sau chuyến đi vòng quanh thế giới, người ta mới biết chắc rằng cả hai giả thuyết đều sai.[17] Và ngay cả sau sự kiện Magellan, việc Trái Đất hình cầu cũng vẫn chưa hoàn toàn rõ ràng. Còn có những khả năng khác nữa.



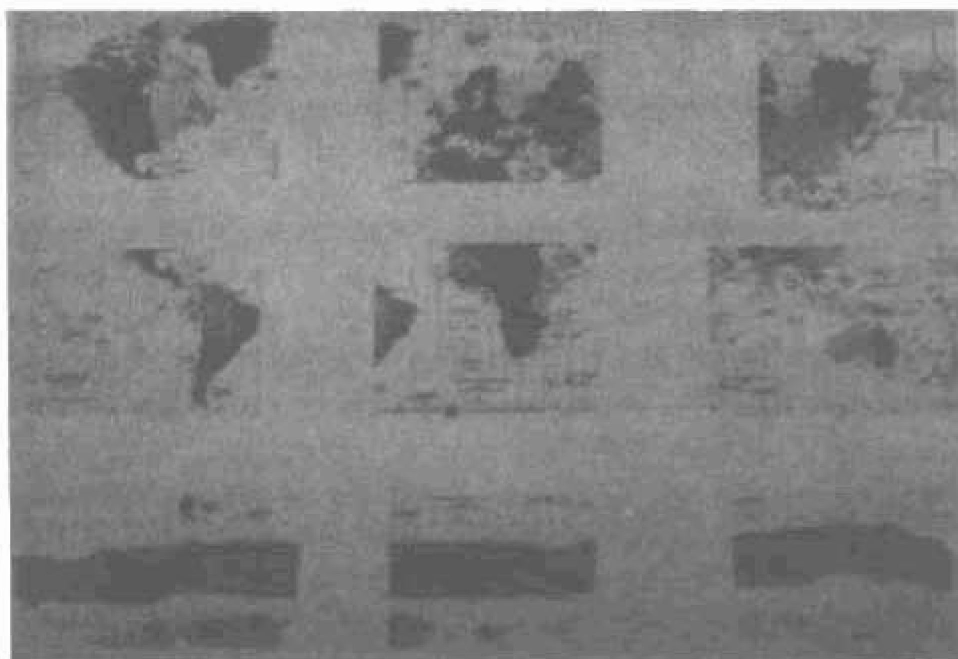
Hình 3. Bản đồ của Agnese.

Điều này có vẻ như một trò đùa. Nhưng có thực là như vậy không? Năm 1546, tấm bản đồ thế giới đặc biệt

---

[17] Ferdinand Magellan bắt đầu chuyến thám hiểm vòng quanh Trái Đất năm 1519 với một đoàn thủy thủ 265 người. Ông bị giết trong một cuộc chiến ngoài khơi biển Philippines tháng 4 năm 1521. Nhà thám hiểm xứ Basque Juan Sebastián Elcano nắm quyền chỉ huy và trở về Tây Ban Nha năm 1522 với 17 người sống sót.

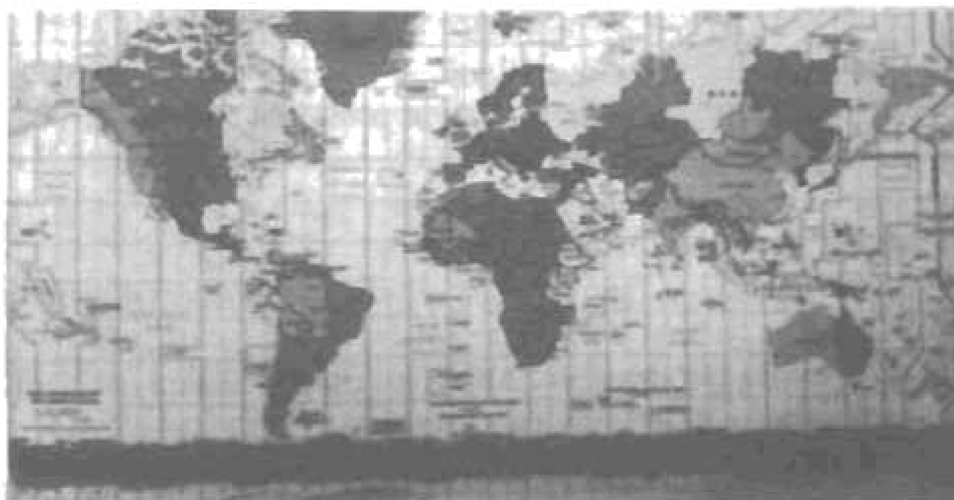
được vẽ bởi Battista Agnese mô tả chuyến đi của Magellan. Agnese rõ ràng đã nghĩ về một Trái Đất hình cầu. Ngày nay, khi nhìn vào bản đồ này, chúng ta mặc nhiên nghĩ rằng tất cả các điểm ở lề trên tụ vào một điểm duy nhất (Bắc Cực), và tất cả các điểm ở lề dưới đều được quy về một điểm duy nhất khác (Nam Cực). Hơn nữa, mỗi điểm trên lề phải tương ứng với một điểm bên lề trái có cùng vĩ độ. Người quan sát thời nay biết rằng đây là phương pháp "đúng" để giải thích tấm bản đồ này, còn những người khác thì thích nó, bởi vì thời nay con người đã khám phá thế giới và biết được khu vực nào là một dải đất liền, khu vực nào là đại dương. Nhưng vào thời Agnese, với các vùng lãnh thổ rất rộng lớn chưa được vẽ bản đồ, người thời đó đã có thể nhận thức được rằng ta có thể đi lên phía bắc (nghĩa là, lề trên cùng) của bản đồ và trở về từ phía nam (nghĩa là, lề dưới cùng) của bản đồ. Hoặc là ta có thể đi mãi mãi lên phía bắc (hoặc xuống nam) mà không bao giờ quay trở lại.



Hình 4. Atlas của một thế giới tưởng tượng.

Hãy xem ví dụ ở Hình 4, tập atlas của một thế giới ảo thoạt nhìn không có gì quá khác biệt so với thế giới của chúng ta. Nhưng những tấm bản đồ này khi ghép lại với nhau thì không ăn khớp vào một hình cầu.

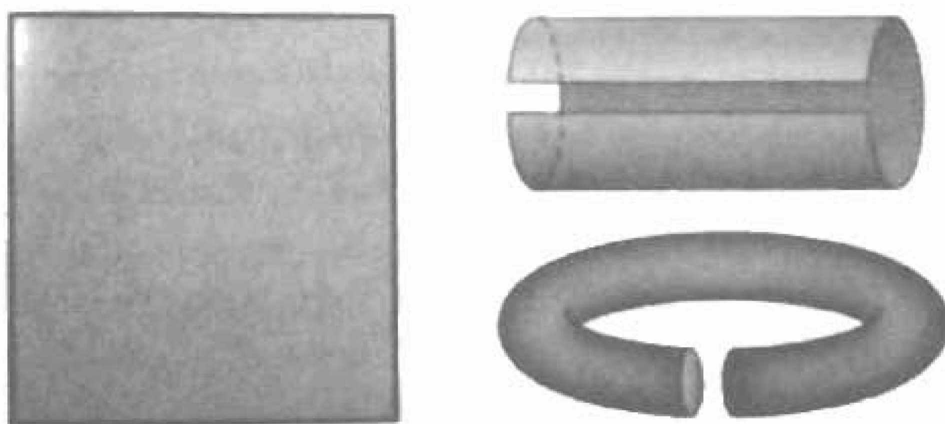
Để hiểu thế giới được vẽ bởi những tấm bản đồ này, ta hãy liên kết các bản đồ bằng cách chập lề ngoài cùng bên phải phía đông của từng bản đồ với lề ngoài cùng bên trái phía tây của từng bản đồ liền trái. Tương tự, ta chập lề trên phía bắc của từng bản đồ với lề dưới phía nam của bản đồ ngay trên nó. Cuối cùng ta có được bản đồ thế giới như trong Hình 5.



Hình 5. Bản đồ thế giới thu được bằng cách dán các bản đồ khu vực lại với nhau.

Để có được một miêu tả về thế giới này trong không gian, mà ai cũng nghĩ là một hình cầu, hãy chập lề phải vào lề trái và lề trên với lề dưới. Kết quả là gì? Bây giờ, như sơ đồ mà Hình 6 cho thấy, khi dán các cạnh trên của hình chữ nhật vào các cạnh dưới ta có một hình trụ. Dán các cạnh bên phải vào cạnh trái, tức là gắn vòng tròn bên

phải vào vòng tròn bên trái của hình trụ, nó cho ra bề mặt của một cái bánh rán Mĩ. Một bề mặt như vậy được gọi là vòng xuyến (để phân biệt với vật thể mà chúng ta vẫn thường ăn).



Hình 6. Nối cạnh trên và dưới của một hình chữ nhật lại với nhau cho ta một hình trụ ở hình trên bên phải. Nối tiếp cạnh phải và trái với nhau sẽ cho ta một vòng xuyến. Hãy thử tưởng tượng nếu ta xếp bản đồ ở Hình 5 để có được một vòng xuyến thì sẽ ra sao?

Ai đó có thể phản đối rằng thế giới của chúng ta không thể trông giống như một vòng xuyến. Nếu ta sống trên bề mặt của vòng tròn phía trong (đối mặt với lỗ hổng bên trong cái bánh rán), thì chẳng phải là ở phía xa ta sẽ thấy phần bề mặt đối diện mình đột ngột hiện ra trong không gian? Có thể. Nhưng nếu như thế giới rất rộng lớn thì sẽ ra sao? Hoặc, điều gì sẽ xảy ra, nếu như phần nằm dọc theo vòng tròn phía trong tương ứng với các vùng cực trong bản đồ thế giới ở Hình 5? Làm sao ta có thể bác bỏ được giả thuyết này trong thời đại của Columbus? Không thể. Magellan rất có khả năng đã dong buồm dọc theo vòng tròn bên trong của một vòng xuyến, hoặc,

đúng vậy, cũng có thể là vòng ngoài. Và nếu Trái Đất thực sự rất lớn, có thể ông mới chỉ đi từ vòng tròn bên ngoài vào vòng tròn bên trong, theo một con đường mà ta có thể gọi là một quỹ đạo nhỏ trên vòng xuyến.

Trở lại với bản đồ trong Hình 3, giả sử rằng thế giới của chúng ta là một thế giới mà ở đó ta có thể tiếp tục mãi mãi đi lên phía bắc, và tương tự, xuống phía nam. Trong trường hợp này, thì thế giới của chúng ta sẽ có dạng của một hình trụ dài vô tận.

Chúng ta rút ra kết luận rằng không thể biết với một độ chắc chắn đến tuyệt đối hình dạng của Trái Đất, cho đến khi nó được vẽ trên bản đồ với độ chính xác hoàn hảo tất cả các khu vực kể cả các vùng cực. Song phải đợi đến tận thế kỉ 19, các vùng cực và những chi tiết bên trong một số lục địa mới được vẽ thành bản đồ.

3

Các thế giới có thể

Các báo cáo phổ biến trong toán học thường nhấn mạnh nỗi ám ảnh của ngành học này trước độ chính xác, trước sự chứng minh. Các nhà toán học thường nói đùa về sự cố chấp của họ trước sự chính xác. Tuy nhiên, cuộc tìm kiếm sự chính xác lại phức tạp hơn nhiều chính kết quả của nó. Sự chính xác cho phép ta lí luận một cách hợp lí về các đối tượng nằm ngoài phạm vi của kinh nghiệm thông thường. Nó là một công cụ để khám phá tính khả dĩ: những gì có thể đúng và những gì là đúng.

Cuộc thảo luận trong chương trước đưa ra khả năng thế giới có thể là một hình xuyến. Ta không thấy phần còn lại của một chiếc bánh rán Mĩ khi nhìn lên bầu trời, do đó giả thuyết này vẫn là một khả năng mở. Ngày nay, ta có thể bay ra ngoài Trái Đất để chụp ảnh từ các vệ tinh và tàu vũ trụ. Nhưng trước kỉ nguyên của các chuyến bay thám hiểm không gian, người ta phải vận dụng trí tưởng tượng để nhìn nhận Mặt Trăng và Mặt Trời là các quả cầu thay vì những chiếc đĩa phẳng nằm đối diện chúng ta. Các hành tinh và ngôi sao khác giống như các điểm phát

sáng. Thay vì tranh luận về những gì chúng ta nhìn thấy trên bầu trời, hãy giả sử rằng ta không thể nhìn thấy được gì bên ngoài Trái Đất. Hãy tưởng tượng chúng ta đang sống trên một hành tinh như sao Kim luôn bị một đám mây bao phủ xung quanh."Trái Đất của chúng ta có thể có hình dạng gì? Liệu nó có thể là cái gì đó khác hình cầu hoặc vòng xuyến không?".

Mặc dù những câu hỏi này được đóng khung bằng cách yêu cầu bạn tưởng tượng về các thế giới mà ta biết là hình dạng của chúng có thể "sai" theo nghĩa đen, nhưng đặc trưng của toán học từ xưa tới nay là, các thao tác sử dụng trí tưởng tượng đã dẫn tới những hiểu biết, cấu trúc mới mà sau này được chứng minh là chính xác và là những gì cần thiết cho một đột phá khoa học lớn.

Đi xa hơn nữa, chúng ta cần có các thuật ngữ rõ ràng. Khái niệm quan trọng nhất đối với chúng ta là đa tạp hai chiều hoặc bề mặt. Chúng ta đạt đến khái niệm này bằng cách suy nghĩ về các hình dạng có thể của thế giới, và cũng chẳng có hại chút nào nếu tưởng tượng rằng các đa tạp hai chiều là các thế giới hình mẫu mà chúng ta có thể sinh sống trên đó. Cụ thể hơn nữa, ta hãy đồng ý rằng một *đa tạp hai chiều* hay *bề mặt* là một đối tượng toán học mà mọi khu vực trên đó có thể được biểu diễn bằng một bản đồ nào đó trên một tờ giấy. Khái niệm "*hai chiều*" có nghĩa là tại một điểm bất kì trên một đối tương như thế, các điểm bên cạnh nó có thể được biểu diễn chỉ bằng hai hướng độc lập với nhau. Điểm này quan trọng bởi vì vẽ bản đồ đòi hỏi chúng ta phải xác định được mối liên hệ giữa các điểm. Ta phải có khả năng xác định từng điểm.

Các bản đồ là những tờ giấy, mà trên đó tất cả các điểm trên thế giới đều được biểu diễn, có hai chiều. Một tập hợp các bản đồ bao phủ một bề mặt, nghĩa là mỗi điểm trên bề mặt đó xuất hiện ít nhất trên một bản đồ, được gọi là một *atlas*. Nếu mua một atlas của thế giới, bạn sẽ nhận được một quyển sách bản đồ và bạn sẽ dễ dàng chỉ ra rằng tất cả vị trí trên thế giới xuất hiện ít nhất trên một trong số các bản đồ đó. Một đa tạp hai chiều hay bề mặt là một đối tượng được biểu diễn bởi một atlas.

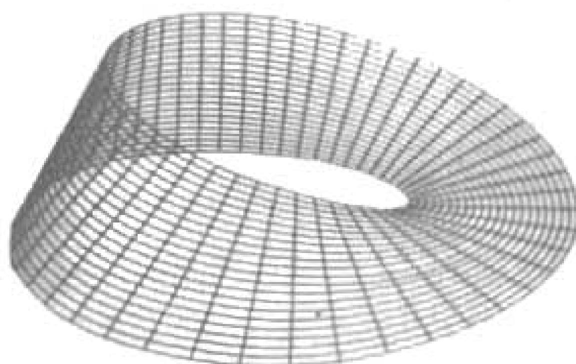
Các nhận xét sau đây được xếp theo thứ tự. Thứ nhất, các đa tạp hai chiều là những đối tượng toán học đã được lí tưởng hóa từ thực tế vật lí. Khi nói Trái Đất là một hình cầu, ta đang nói rằng đối tượng toán học mặt cầu là một mô hình đúng cho bề mặt của Trái Đất. *Mặt cầu* ở đây có nghĩa là lớp vỏ bên ngoài hay bề mặt, ví dụ như của một quả bóng. Vì vậy, khi nói Trái Đất là một mặt cầu, ta không kể đến tầng đất đá hoặc magma nằm dưới bề mặt. Tương tự, vòng xuyến là một đa tạp hai chiều bất kì mô phỏng bề mặt hoặc lớp vỏ của một chiếc bánh rán chứ không gộp cả phần bên trong. Sự chính xác đặc biệt mà ta có được bằng cách đưa ra các định nghĩa kĩ lưỡng, cho phép sự tồn tại của một vài đối tượng kì dị, và chúng ta phải cẩn thận để tránh nhầm lẫn giữa các đối tượng nghiên cứu mang tính vật lí hay mang tính toán học. Đối với chúng ta, đa tạp hai chiều là một tập hợp mà tất cả các điểm nằm gần một điểm bất kì có thể biểu diễn được trên bản đồ. Vậy thôi. Các nhà toán học sử dụng từ *bề mặt* như một từ đồng nghĩa với *đa tạp hai chiều*, mặc dù không phải

mọi đa tạp hai chiều đều là bề mặt của một vật rắn[18]. Cũng như không phải lúc nào cũng định nghĩa được thế nào là phải và trái trên một đa tạp[19]. Tuy nhiên, bất cứ đa tạp hai chiều nào mà trên đó ta luôn định nghĩa được thế nào là trái và phải, cũng có thể được dùng để biểu diễn bề mặt của một vật rắn nào đó, và ngược lại. Một đa tạp như vậy được gọi là đa tạp *có thể định hướng* (orientable manifold).[20]

---

[18] Một nhà toán học sẽ sử dụng "biên của một đa tạp ba chiều nào đó" thay vì "bề mặt của một vật rắn" như cách nói thông thường.

[19] Chắc hẳn bạn sẽ nhớ là đã nhìn thấy hay đọc đâu đó về dải Mobius (Mobius band). Vật thể này được tạo ra bằng cách dán một cạnh ngắn của một tờ giấy hình chữ nhật dài vào cạnh ngắn kia sau khi lộn ngược 180 độ. Đây là một đa tạp hai chiều có biên. Nó có khá nhiều tính chất đáng quan tâm. Một ví dụ là bạn không thể xác định được trái và phải trên đa tạp này. Giả sử bạn dùng một que diêm nhỏ đánh dấu trái và phải ở hai đầu que diêm và cả ở điểm xuất phát trên đa tạp, di chuyển que diêm dọc trên bề mặt đó. Sau một hồi, que diêm quay trở lại điểm xuất phát với hai đầu được đánh dấu trái và phải đổi chỗ cho nhau. Đa tạp này chỉ có một mặt, nếu bạn bắt đầu đi vòng quanh từ mặt này, bạn sẽ trở lại vào mặt bên kia. Vì vậy, đa tạp này không thể là bề mặt của bất cứ vật gì được.



Hình a. Dải Mobius.

[20] Nếu một đa tạp hai chiều không thể định hướng được, nó luôn chứa một dải Mobius. Biên của dải Mobius là đường cong khép kín

Một điều quan trọng cần lưu ý nữa là việc sử dụng từ *chiều (dimension)*. Trong cách dùng tùy tiện của ngôn ngữ hằng ngày, ta thường nghe thấy những khẳng định như trái đất (hay một mặt cầu) hoặc một vòng xuyến là có ba chiều bởi vì ta cần một không gian ba chiều để có thể

---

duy nhất, và vì vậy về mặt topo học thì nó là vòng tròn. Nối một hình đĩa vào dải Mobius bằng cách ghép các điểm trên vòng tròn xung quanh nó với đường biên của dải Mobius sẽ cho ta một đa tạp không biên (gọi là mặt phẳng xạ ảnh (projective plane)). Một ví dụ nổi tiếng khác là của đa tạp compac không biên không định hướng được là chai Klein, trên đó bề mặt bên trong kết nối liên tục ra bề mặt bên ngoài. Vật thể này được tạo ra sau khi nối hai dải Mobius bằng cách dính hai vòng tròn biên lại. Chai Klein và mặt phẳng xạ ảnh là ví dụ của các đa tạp hai chiều không phải là bề mặt của một vật rắn.



Hình b. Chai Klein.

hoàn toàn đặt chúng vào bên trong. Chúng ta sẽ không *bao giờ* sử dụng từ *chiều* theo nghĩa này. Đối với chúng ta, *chiều* đề cập đến số hướng độc lập cần thiết để biểu diễn tất cả các điểm nằm gần một điểm cho trước trên một đối tượng. Nếu chúng ta cố gắng kết nối tất cả bản đồ trong một atlas lại để tạo thành một hình cầu biểu diễn cho bề mặt một cách tổng thể hơn, thì chắc chắn ta sẽ cần một chiều thứ ba (hoặc hơn nữa), nhưng ta vẫn xem đa tạp hay bề mặt này là hai chiều. Chiều đề cập đến số lượng các hướng độc lập mà một người sống trên đa tạp cảm nhận nhờ kinh nghiệm chứ không phải là số chiều mà chúng ta cần để đặt vật thể vào bên trong[2]. Vì vậy, bề mặt trái đất là hai chiều bởi vì để biểu diễn một khu vực của nó, ta sử dụng một bản đồ trên một mảnh giấy (hoặc ta có thể sử dụng hai con số, chẳng hạn như kinh độ và vĩ độ, để biểu diễn bất cứ điểm nào gần một điểm cố định). Một mặt phẳng có hai chiều, nhưng một đường dù có cong hay không (đặc biệt là đường tròn) chỉ có một chiều. Không gian trong đó thế giới của chúng ta tồn tại (không gian đó là vũ trụ) có ba chiều, khu vực bên dưới bề mặt trái đất (tầng đất đá và magma) cũng vậy. Sau này ta sẽ trở lại với khái niệm chiều, định nghĩa nó thậm chí theo một cách còn kĩ càng hơn và đơn giản hóa nó thành các con số. Ta sẽ thấy rằng đa tạp có bao nhiêu chiều cũng có thể tồn tại.

---

[2] Một số bề mặt không đặt vừa vào không gian ba chiều và đòi hỏi thêm nhiều chiều khác. Câu hỏi về số chiều mà một không gian cần có để có thể đặt vừa một bề mặt vào bên trong nó là những bài toán thú vị khác mà ta không đề cập đến ở đây nhưng sẽ nói tới sau này.

Nhưng bây giờ, chúng ta đề cập đến hai thuật ngữ khác được sử dụng trong ngôn ngữ hằng ngày, nhưng theo cách không đủ chính xác cho các mục đích của chúng ta. Đầu tiên là *biên* (boundary). Một số đa tạp hai chiều có biên, số khác thì không. Biên của một đa tạp hai chiều là lề của nó, hoặc tập hợp các lề, nhìn từ mắt của một người đứng trên đa tạp đó. Một mặt phẳng kéo dài đến vô tận về mọi hướng thì không có biên nhưng một đĩa trên mặt phẳng đó lại có biên, đó là vòng tròn bao xung quanh. Bề mặt bên ngoài của một ống tuýp bằng đồng dài một thước tây có biên, cụ thể là hai vòng tròn nằm trên mỗi đầu ống. Một mặt cầu không có biên (mặc dù chính nó là biên của quả bóng đặc bên trong nó). Nếu bạn sống trên Trái Đất, bạn sẽ không tìm ra được một phần lề nào mà tại đó Trái Đất kết thúc. Tương tự, hình xuyến không có biên (mặc dù nó là biên của phần bánh rán đặc ở bên trong). Nếu một đa tạp hai chiều có biên thì biên đó là một chiều. Khái niệm biên cũng áp dụng với các đối tượng có số chiều khác. Một vòng tròn không có biên (mặc dù nó là biên của cái đĩa nằm bên trong). Một đường thẳng kéo dài đến vô tận theo cả hai hướng cũng không có biên. Nhưng một đoạn thẳng dài một thước tây có biên, đó là hai điểm nằm ở hai đầu. Lõi rắn bên trong của Trái Đất có một biên, đó là một đa tạp hai chiều có dạng mặt cầu. Nếu như một đa tạp có biên thì biên đó sẽ có ít hơn một chiều so với số chiều của đa tạp đó.

Thuật ngữ thứ hai là *hữu hạn* (finite). Chúng ta nói rằng một đa tạp hai chiều là hữu hạn (hoặc *compac*) nếu

chỉ cần một số lượng hữu hạn bản đồ để bao phủ nó. *Mặt phẳng Euclid* (hay còn gọi *là không gian hai chiều Euclid* hoặc đơn giản là *không gian hai chiều*) mà chúng ta học ở trường trung học kéo dài đến vô tận theo hai hướng độc lập với nhau là một đa tạp hai chiều nhưng không hữu hạn. Còn mặt cầu và vòng xuyến là những đa tạp hai chiều hữu hạn - trên những da tạp này ta không thể đi mãi mãi về một hướng mà không có khả năng quay trở về điểm gần nơi xuất phát.

Cho rằng một vật thể hữu hạn phải có biên là một quan niệm sai lầm phổ biến. Những tranh luận đầu tiên về việc Trái Đất là hữu hạn hay không thường đã bị quan niệm hóa thành các tranh luận khác như là liệu Trái Đất có kéo dài mãi mãi hay không, hay là nó có một lề mà tại đó ta có thể bị rớt ra ngoài. Lúc đầu, con người không biết rằng hành tinh chúng ta có dạng một mặt cầu (hoặc một hình xuyến) và vì vậy chưa biết rằng nó vừa hữu hạn vừa không có biên. Tất nhiên, để nghĩ rằng Trái Đất là một mặt cầu đòi hỏi ta phải chấp nhận ý tưởng có vẻ vô lí là có người bên kia bán cầu dang đi bộ với bàn chân hướng về phía chúng ta. Mặc dù không ai gặp khó khăn để chấp nhận điều này vào thời đại ngày nay, vẫn còn có nhiều người mắc các lỗi tương tự khi nói về vũ trụ. Họ cho rằng nếu vũ trụ là hữu hạn thì nó phải có biên (bây giờ ta đã biết rằng nếu một biên như vậy tồn tại thì nó phải là một vật thể hai chiều) mà chúng ta không thể vượt qua được. Không phải như vậy.

HÌNH HỌC VÀ TOPO HỌC

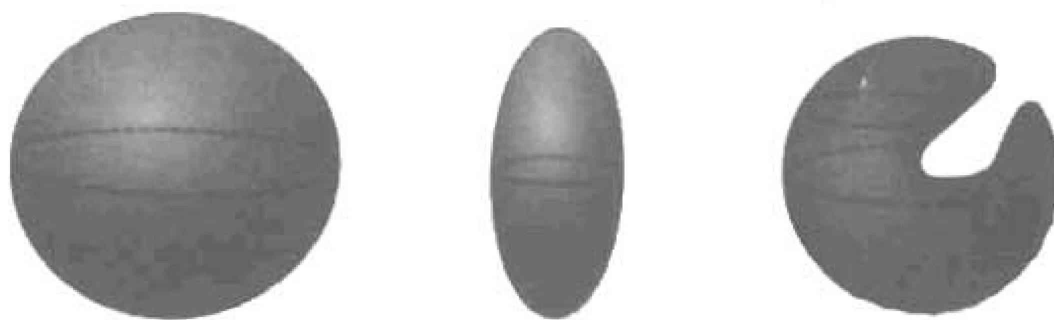
Chúng ta còn chút ít việc phải làm nữa để cho việc đọc cuốn sách này được trôi chảy. Khi nói hai đa tạp *giống nhau*, chúng ta phải chỉ ra chính xác điều đó có nghĩa gì. Cũng giống mọi vấn đề khác, điều này phụ thuộc vào quan điểm của mỗi người. Hai vật thể có thể giống nhau, hoặc tương đương nhau, trong một khía cạnh này nhưng lại khác nhau ở khía cạnh khác. Khi nói về hình dạng, ta thường không quan tâm tới các tính chất như kích thước hoặc khoảng cách-những tính chất thuộc về *hình học* (geometry), mà chỉ quan tâm đến các tính chất vẫn được bảo toàn ngay cả khi vật thể bị kéo dài hay biến dạng vừa phải. Những tính chất này thuộc về lĩnh vực *topo học* (topology). Cho phép chúng tôi nói rằng hai bề mặt giống nhau về mặt topo học nếu như tất cả các điểm trên một bề mặt có thể tham gia vào một phép tương ứng một-một với tất cả các điểm trên bề mặt kia, sao cho các điểm nằm gần một điểm trên bề mặt này cũng tương ứng với các điểm nằm gần một điểm của bề mặt kia (các phép tương ứng như vậy được gọi là có tính *liên tục* (continuous)).[22] Hai đa tạp giống nhau về mặt topo học còn được gọi là *đồng phôi* (homeomorphic), và phép tương ứng một-một

---

[22] Từ *liên tục* thường đề cập đến một điều kiện toán học quan trọng: Sự tương ứng một-một giữa hai bề mặt gọi là *liên tục* nếu như một tập hợp điểm tiến về một điểm trên một bề mặt này luôn tương ứng với tập hợp điểm trên bề mặt kia cũng tiến về một điểm và hai điểm này tương ứng (Đặc biệt, các điểm gần nhau tương ứng với các điểm gần nhau, nhưng chú ý là ta không nhất thiết phải định nghĩa "gần" là như thế nào.).

thiết lập sự giống nhau đó giữa hai đa tạp gọi là *phép đồng phôi* (homeomorphism). Topo học nghiên cứu các tính chất của bề mặt (và các đối tượng khác) cho phép xác định hai bề mặt (hoặc các đối tượng khác) đồng phôi hay không. Các tính chất như vậy gọi là *tính chất topo học*.

Các tính chất topo học có thể rất khác các tính chất hình học như độ dài và góc. Hai bề mặt bất kì có thể biến đổi để trở nên giống nhau bằng cách kéo dài hoặc nới rộng ra (không xé rách bởi vì làm vậy có thể phá vỡ tính liên tục) là đồng phôi. Hai mặt cầu có bán kính khác nhau là đồng phôi. Tất cả bề mặt trong hình dưới đây đều đồng phôi, và một nhà topo học sẽ xem tất cả chúng giống như một hình cầu. Đặc biệt, một nhà topo học sẽ thắc mắc rằng Columbus đã lo lắng điều gì vậy?! Hình quả lê mà ông muốn gán cho Trái Đất thực ra cũng là một mặt cầu, giống như bề mặt một quả táo. Để tránh nhầm lẫn, đôi khi chúng ta gọi các mặt cầu đối xứng nằm ở bên trái trong Hình 7 là một mặt cầu tròn. Columbus, trong tưởng tượng của ông về hình quả lê, đã dự đoán Trái Đất không phải là mặt cầu tròn, nhưng dù sao nó cũng là một mặt cầu.



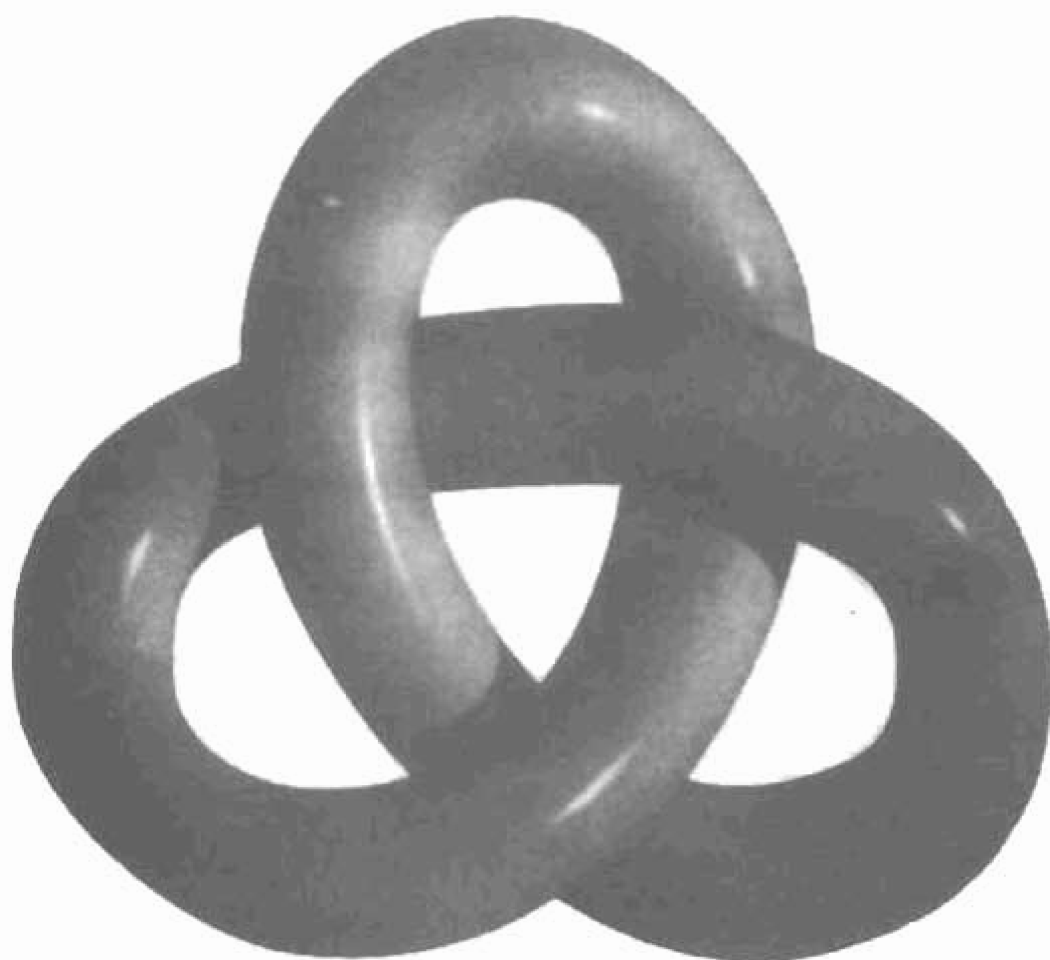
Hình 7. Những bề mặt này đều đồng phôi với mặt cầu hai chiều.

Rõ ràng, tính đồng phôi là một khái niệm còn chưa chuẩn về sự giống nhau. Các hình xuyến "*thắt nút*" trong Hình 8 là đồng phôi với một hình xuyến thông thường, mặc dù chẳng thể làm biến dạng hình xuyến này thành hình xuyến kia mà vẫn tuân thủ tính liên tục (ít nhất là nếu bạn khăng khăng không cho các điểm trên hình xuyến chạy ngang qua bản thân nó).[23] Thực ra, nếu chúng

---

[23] Bạn đọc nào chú ý sẽ thấy rằng (ít nhất) có 3 điểm không ổn. Đầu tiên là chưa chắc chắn hình xuyến thắt nút đồng phôi với hình xuyến bình thường. Theo định nghĩa của chúng ta, điều này có nghĩa là ta có thể đặt các điểm của hình xuyến này lên hình xuyến kia theo sự tương ứng một-một sao cho các điểm gần nhau tương ứng với các điểm gần nhau. Để xem điều này có khả dĩ hay không, hãy tưởng tượng cắt từng hình xuyến dọc theo đường cong vòng quanh cổ của nó. Trong từng trường hợp, bạn sẽ có được một hình trụ giới hạn hai đầu bởi hai vòng tròn giống nhau trước khi cắt. Các điểm trên hai hình trụ có thể được sắp xếp để có được sự tương ứng một-một sao cho các điểm không nằm trên vòng tròn tương ứng với nhau, và các điểm trên vòng tròn tương ứng với nhau. Như vậy, tất cả các điểm gần nhau tương ứng với các điểm gần nhau dù chúng nằm trên vòng tròn hay không. Thứ hai, bạn có thể tự hỏi làm sao ta biết được một hình cầu không đồng phôi với hình xuyến. Câu trả lời lần nữa lại là không rõ ràng. Giả sử cả hai đồng phôi (có nghĩa là cả hai có sự tương ứng một-một). Chọn một đường cong đóng đơn giản (nghĩa là đường cong bắt đầu và kết thúc cùng một điểm và không tự cắt ngang qua chính nó) trên hình xuyến sao cho nó không chia hình xuyến ra làm hai phần. Ví dụ như đường cong vòng quanh cổ hình xuyến. Nếu như có sự tương ứng một-một, bạn có thể cũng tìm được một đường cong đóng đơn giản trên hình cầu mà không chia hình cầu ra làm đôi. Nhưng trên thực tế, bất cứ đường cong đóng nào trên hình cầu cũng chia nó ra làm đôi. Mặc dù điều này khá rõ ràng, nhưng chứng minh được nó lại khó một cách đáng ngạc nhiên. Bài toán này được gọi là Định lí đường cong Jordan. Cuối cùng, ta vẫn chưa định nghĩa không gian ba chiều. Tuy nhiên, ta sẽ bàn về nó ở Chương 4, và kĩ hơn ở Chương 7.

ta chập các lề trên và dưới của bản đồ ở Hình 5 lại để có được một hình trụ và sau đó thắt nút hình trụ trước khi cho các lề trái và phải chập vào nhau thì ta sẽ có được một hình xuyến thắt nút. Nhưng cư dân sống trong một thế giới luôn bị mây bao phủ mà trong đó không một hình dạng nào có thể được nhìn thấy từ xa sẽ không thể xác định được thế giới của họ có bị thắt nút hay không nếu chỉ dựa vào một atlas. Nếu sống trên một thế giới có hình dạng giống một hình xuyến thắt nút, ta có thể cắt bề mặt của nó thành các tấm bản đồ và lắp ráp chúng lại thành một hình xuyến thông thường.



Hình 8. Hình xuyến thắt nút.

PHÂN LOẠI BỀ MẶT

Với các thuật ngữ đã có, ta có thể đặt ra một số câu hỏi mang nhiều ý nghĩa về những gì là khả dĩ. Giả sử chúng ta sống trên một thế giới mà tất cả các khu vực của nó đều đã được vẽ bản đồ một cách cẩn thận. Hay nói cách khác, chúng ta có một cuốn sách bao gồm các bản đồ mà khi ghép chúng lại ta sẽ được toàn bộ thế giới. Vì số lượng bản đồ có hạn, nên ta biết rằng thế giới không kéo dài đến vô tận. Nếu chúng ta cố gắng vẽ lại bản đồ với tỉ lệ gần giống, cắt giảm các vùng trùng lặp, và cố gắng lắp ráp chúng với nhau, ta có thể thu được những hình dạng khác nhau nào? Hay nói cách khác, có tất cả bao nhiêu khả năng cho các đa tạp hai chiều?

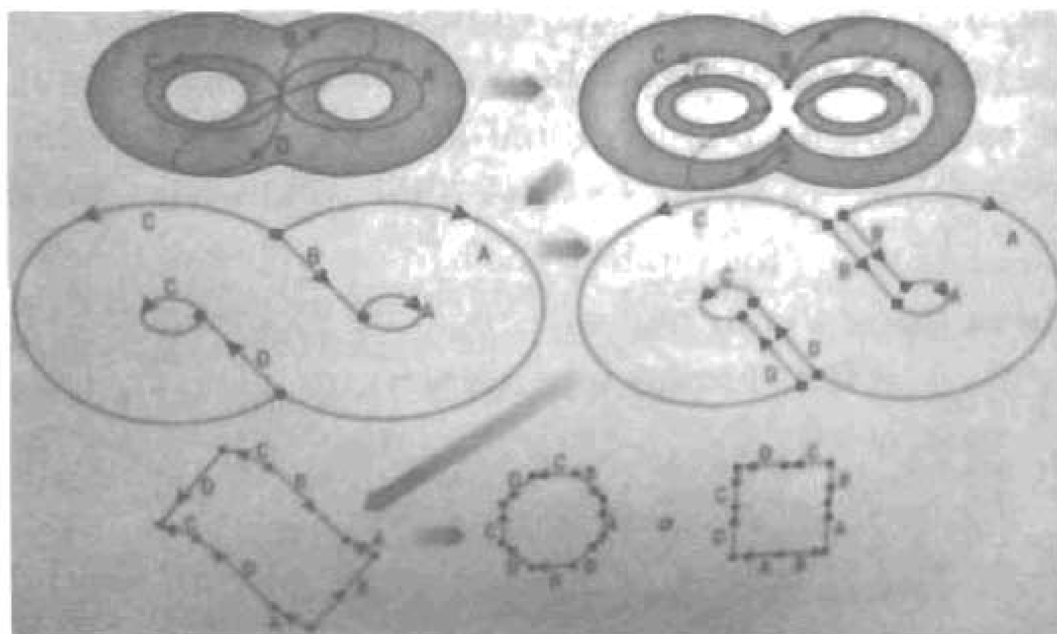
Đầu tiên chúng tôi lưu ý rằng mặt cầu và hình xuyến không phải là các khả năng duy nhất. Hãy xem xét hình xuyến hai lỗ phác thảo trong Hình 9. Nếu chúng ta sống trong một thế giới như vậy, và nếu chúng ta bắt đầu một cuộc hành trình từ bất kì điểm nào trên đó và tiếp tục đi mãi, ta sẽ không bao giờ thoát khỏi nó. Không có bất kì một lề nào cả. Ta có thể vẽ bản đồ bất cứ khu vực nào trên đó. Sau đó, ta có thể tập hợp các bản đồ lại thành một cuốn sách và dựng thành một atlas của thế giới này. Liệu một nhà địa lí có thể chỉ nhờ việc nghiên cứu atlas này mà xác



Hình 9. Hình xuyến hai lỗ.

định được loại đa tạp ta đang sống trên đó hay không? Mọi nhà thám hiểm sẽ chẳng gặp phải bất kì cái lỗ nào bởi vì mọi điểm trên bề mặt đều liên thông với nhau.

Để hình dung một atlas của thế giới này trông ra sao, ta có thể cắt nó ra thành các khu vực nhỏ mà bản đồ của chúng có thể dễ dàng được vẽ. Trong thực tế, ta cũng có thể tạo một bản đồ duy nhất của thế giới bằng cách nối các bản đồ khu vực lại. Hãy tưởng tượng thế giới đó bị cắt dọc theo bốn đường cong bắt đầu từ cùng một điểm như trong Hình 10. Để tiện theo dõi việc cắt lớp và ghép sẽ diễn ra như thế nào, ta hãy đánh dấu với các ký tự A, B, C, D như trong hình và cắt theo hướng mũi tên. Bắt đầu với các đường cắt A và C, ta có thể tưởng tượng rằng, nếu mở bề mặt cong ra và trải lên một mảnh giấy phẳng, ta sẽ có hình dạng của một con số 8. Cắt dọc theo hai đường cong còn lại (bây giờ là đoạn thẳng) sẽ cho ra một hình mà ta có thể biến đổi nó thành một bát giác hay thậm chí

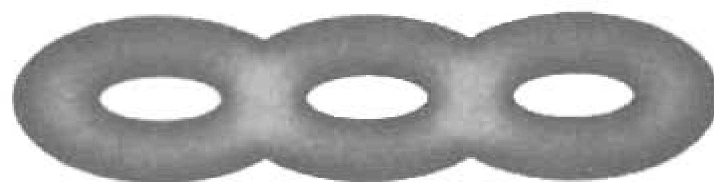


Hình 10. Cắt một hình xuyến hai lỗ.

là một hình chữ nhật. Điều này sẽ đem lại một bản đồ thế giới với những phần lề mà chúng phải thích hợp với sự cắt ghép vừa nói đến ở trên.

Liệu chúng ta có thể liệt kê hết tất cả các đa tạp hai chiều khả dĩ hay không? Sau khi đoàn thám hiểm của Magellan trở về, nhưng trước khi có một ai đó khám phá ra các vùng cực, liệu chúng ta đã có thể có sẵn một danh sách các hình dạng có thể của thế giới không? Câu trả lời, cùng với chứng minh của nó, là một trong những thành tựu vĩ đại của thế kỉ 19.

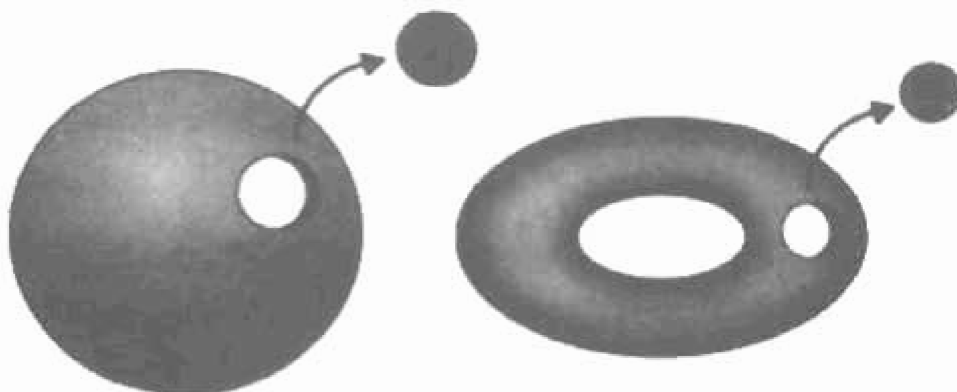
Câu trả lời này, hay danh sách các hình dạng có thể, thực ra rất đơn giản. Chúng ta có thể đang sống trên một hình xuyến hai lỗ. Tương tự, chúng ta cũng có thể đặt ra các khả năng về một hình xuyến ba lỗ (xem Hình 11), bốn lỗ, hay các hình xuyến với số lỗ bất kì nào. Tất cả chúng đều khác nhau và đều thỏa mãn các điều kiện mà mọi đa tạp hai chiều có thể định hướng phải thỏa mãn. Tất cả chúng đều là những hình dạng có thể của một thế giới, - nếu hình dạng của thế giới chúng ta là một trong số chúng, và nếu ta đứng ở bất cứ điểm nào trên thế giới đó, thì ta đều có thể vẽ được bản đồ của khu vực xung quanh ta.



Hình 11. Hình xuyến ba lỗ.

Một phương thức thú vị khác để tìm hiểu về những đa tạp khác nhau này, đó là diễn giải chúng dưới góc độ của

khái niệm tổng liên thông của hai đa tạp. Giả sử ta có hai đa tạp hai chiều và ta cắt một chiếc đĩa ra khỏi mỗi đa tạp.



Hình 12. Cắt một chiếc đĩa ra khỏi một mặt cầu (trái) và một hình xuyến (phải).

Biên của chiếc đĩa là một vòng tròn. Ta có thể tạo nên một đa tạp hai chiều mới không biên bằng cách dán hai đa tạp có biên mà ta vừa mới tạo ra với nhau, dọc theo biên của từng đa tạp - chính là hai vòng tròn. Đa tạp này được gọi là *tổng liên thông* của hai đa tạp ban đầu. Hình 13 minh họa hình xuyến hai lỗ là một tổng liên thông của hai hình xuyến thông thường. Một hình xuyến ba lỗ là một tổng liên thông của một hình xuyến hai lỗ và một hình xuyến thông thường, và do đó là tổng liên thông của ba hình xuyến thông thường. Một hình xuyến bốn lỗ là tổng liên thông của bốn hình xuyến thông thường và cứ tiếp tục như vậy.[24]

[24] Tổng liên thông của một đa tạp bất kì với một mặt cầu là một đa tạp giống đa tạp ban đầu. Bởi vì khi bạn cắt một hình đĩa ra khỏi mặt cầu, bạn sẽ còn lại một hình đĩa, do vậy tạo ra một tổng liên thông của một đa tạp với một mặt cầu cũng giống như việc cắt một hình đĩa ra khỏi đa tạp rồi dán nó lại. Chẳng có gì thay đổi cả. Trong các phép biến đổi các tổng liên thông, mặt cầu giống như

Do vậy, một danh sách đầy đủ các đa tạp hai chiều hữu hạn không có biên, có thể định hướng (do đó có thể là bề mặt của một vật thể nào đó) được xác định bởi tất cả các tổng liên thông có thể được tạo ra từ các hình xuyến và các mặt cầu.[25] Chúng ta đào sâu suy nghĩ về kết quả này bao nhiêu, thì chúng ta hiểu biết thêm về toán học bấy nhiêu và đồng thời toán học lại càng thêm vẻ kì thú. Bề mặt xuất hiện ở khắp mọi nơi trong toán học và rất đa dạng. Vladimir Arnold, một trong những nhà toán học vĩ đại nhất còn sống ngày nay, so sánh tầm quan trọng của việc tìm ra định lí phân loại các bề mặt với việc khám phá ra châu Mĩ.[26]

Bây giờ chúng ta đã biết hết các trường hợp có thể của đa tạp hữu hạn hai chiều, hãy giả sử ta là một trong những nhà địa lí đối mặt với một atlas hoàn chỉnh của một thế giới mới nào đó. Nghĩa là, giả sử ta có một tập hợp chi tiết và có đầy đủ bản đồ của các vùng, nhưng ta lại không biết hình dạng thế giới đó. Liệu ta có thể chỉ ra được một đa tạp hai chiều tương ứng với nó chăng? Ta có thể thử lắp ráp tất cả các bản đó lại, nhưng việc này chẳng dễ chút nào: hãy hình dung trường hợp thế giới mà ta

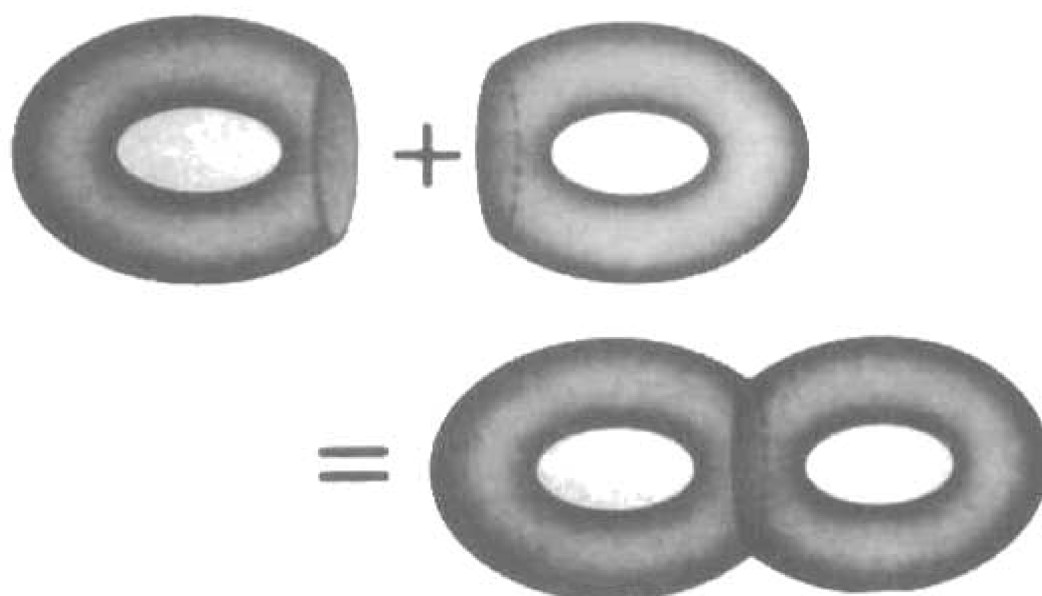
---

một phép đồng nhất (nghĩa là giống như số không trong phép tính cộng và số một trong phép tính nhân).

[25] Ta cũng có thể phân loại tất cả các bề mặt không thể định hướng. Đa tạp loại này là tổng liên thông của một bề mặt có thể định hướng và một bề mặt đồng phôi với mặt phẳng xạ ảnh (xem định nghĩa ở ghi chú trước). Ta có thể tham khảo bài toán và chứng minh mới của nó ở phần phụ chú trong cuốn *The shape of space* của J. Weeks.

[26] V. I. Arnold, "On Teaching Mathematics", *Russian Math. Surveys* 53, no. 1 (1998): 229-36. Bài báo này là một thảo luận tuyệt vời của một nhà toán học vĩ đại, bàn về các thiếu sót trong việc dạy toán

đang cố gắng lắp ráp các bản đồ của nó là một hình xuyến hai lỗ, hoặc phức tạp hơn nữa!



Hình 13. Tổng liên thông.

Câu hỏi này làm phát sinh một số lĩnh vực đáng yêu trong toán học. Ý tưởng trung tâm là xem xét các *đường khép kín* (closed path) hoặc các *vòng lặp* (loop) trên bề mặt. Đây là những quỹ đạo được bắt đầu và kết thúc tại cùng một điểm. Giả sử ta đang sống trên một bề mặt, ta có thể xem vòng lặp là một chuyến đi khứ hồi: Đó là quỹ đạo được vẽ ra khi ta bắt đầu một cuộc hành trình và quay trở lại điểm xuất phát. Hãy tưởng tượng nó như một đường cong tạo ra bởi sợi dây mà ta cầm theo với mục đích thử nghiệm trong suốt hành trình. Các nhà toán học thường đưa ra các mối quan hệ giữa các vòng lặp, gọi là *đồng điều* (homologies), cho phép ta phân loại các vòng lặp khác nhau và vận dụng chúng như những con số. Đa tạp khác

nhau về mặt topo học được phân biệt bởi biểu hiện của các vòng lặp của chúng. Mặc dù việc lí giải vấn đề này sẽ đưa chúng ta đi quá xa, những chúng ta vẫn phải đề cập đến một trường hợp cực kì quan trọng với mình.

Để giải thích cho nó, lưu ý rằng người ta thường nói một cách lạm dụng là hình xuyến có lỗ, do đó khác với hình cầu. Tuy nhiên, nếu chúng ta đang sống trên một thế giới rất lớn (một lần nữa, hãy giả sử rằng nó bị mây che phủ khiến tầm nhìn của ta không thể vượt ra khỏi), và ta không thể thấy được nó có dạng hình xuyến nếu không có tàu vũ trụ. Trong thực tế, nếu hình xuyến này bị thắt nút như trong Hình 8, chúng ta thậm chí khó thể giải thích cái lỗ mà ta đề cập đến có nghĩa là gì.

Mặc dù vậy, có một cách để phân biệt giữa việc sống trên một hình xuyến với việc sống trên một mặt cầu. Trên một hình xuyến (hay bất kì tổng liên thông nào của các hình xuyến) tồn tại các vòng lặp khác biệt một cách cơ bản so với bất kì vòng lặp nào trên một mặt cầu. Để hiểu điều này, hãy tưởng tượng ta đang sống trên một đa tạp và thực hiện một chuyến đi khứ hồi với một điểm xuất phát nào đó. Hãy tưởng tượng ta kéo theo một sợi dây, chẳng hạn một sợi dây câu cá rất mỏng, và không quên cột chặt một đầu dây vào một cái neo ở điểm xuất phát. Nếu ta dừng chân ở một điểm nào đó trên đường đi và kéo sợi dây về phía mình, do đầu kia bị cột chặt vào neo nên sợi dây sẽ căng ra. Sợi dây sẽ vẽ nên một quỹ đạo trực tiếp từ điểm ta dừng đến điểm xuất phát (việc đo độ dài của sợi dây sẽ cho ta khoảng cách chính xác giữa điểm bắt đầu và điểm dừng). Sau đó, ta tiếp tục đi tiếp để hoàn thành chuyến khứ hồi này.

Bây giờ ta đã trở về điểm xuất phát sau khi đã để lại trên bề mặt một vòng dây khổng lồ. Kéo nó về phía ta. Liệu ta có thể kéo toàn bộ cuộn dây về phía mình không (hãy nhớ điểm xuất phát là cố định)? Dù là trên một mặt phẳng hay trên một mặt cầu, câu trả lời là có. Ngay cả một vòng lặp chạy quanh xích đạo của Trái Đất cũng có thể bị co rút lại về điểm xuất phát của nó. Nếu chúng ta kéo nó về phía mình, sợi dây sẽ trượt về phía Bắc chẳng hạn, trên bề mặt của hình cầu - hình ảnh tạo nên bởi sợi dây - lúc này không phải là đoạn đường mà ta đã đi vòng quanh xích đạo. Vòng dây sẽ nhỏ dần nhỏ dần, cùng lúc với việc nó trượt lên Bắc Băng Dương, tới Canada và Bắc Cực, sau đó trở về theo phía Nam và tiếp tục cho đến khi nó quay trở về với chúng ta.

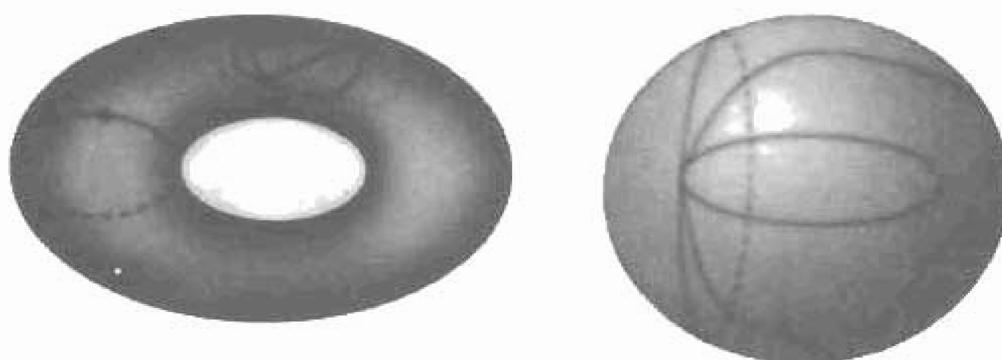
Nếu như mặt cầu đó không tròn một cách tuyệt đối, mà có hình dạng như quả lê của Columbus, chúng ta phải thả ra một lượng dây đủ dài để quỹ đạo của dây có thể vượt qua phần lồi của quả lê, nhưng sau đó ta vẫn có thể kéo cuộn dây căng lại và làm cho quỹ đạo co rút lại thành một điểm. Khi kéo sợi dây lại phía mình, ta sẽ có một sê-ri các vòng càng lúc càng nhỏ dần theo thời gian trên bề mặt[27] (Ta không được phép để cái vòng đó nhảy lên khỏi

---

[27] Về mặt kĩ thuật, ta có thể nói rằng vòng lặp trên một đa tạp được định nghĩa bằng một ánh xạ liên tục f xác định trên khoảng $I = \{x: 0 \le x \le 1\}$ và có giá trị trên đa tạp sao cho $f(0) = f(1)$. Ta nói rằng một vòng lặp có thể co rút lại thành một điểm nếu như tồn tại một ánh xạ liên tục F xác định trên hình chữ nhật $\{(x,t): 0 \le x, t \le 1\}$ sao cho $F(x,0) = f(x)$ (vòng lặp ban đầu) với mọi x, $F(0,t) = f(0)$ với mọi t và $F(x,0) = F(x,1) = f(x)$ với mọi x. Vì vậy, cho một t cố định, $F(x,t)$ là một vòng lặp bắt đầu và kết thúc tại cùng một điểm.

bề mặt cũng như chui xuống đất). Tuy nhiên, trên một hình xuyến, có một số vòng lặp không thể co rút lại thành một điểm. Đặc biệt, nếu như ta đi vòng quanh một cái "lỗ", ta không thể co rút cái vòng lặp lại nhỏ hơn đường kính cái lỗ đó. Tương tự với một tổng liên thông của các hình xuyến. Hình 14 chỉ ra một vòng lặp trên hình xuyến không thể co rút lại thành một điểm, và một số vòng lặp khác có thể co rút lại được thành một điểm.

Nếu tất cả vòng lặp trên một đa tạp có thể co rút lại thành một điểm, đa tạp đó được gọi là *đơn liên* (simply connected). Nhờ định lí phân loại các đa tạp hai chiều, ta có thể thấy rằng mặt cầu là đa tạp hai chiều đơn liên duy nhất. Mặc dù khó, nhưng một nhà địa lí bằng cách làm việc với một atlas có thể xác định xem đa tạp mà nó miêu tả có đơn liên hay không và qua đó biết được thế giới có phải là một mặt cầu hay không.



Hình 14. Vòng lặp ở cực trái của hình xuyến không thể co rút lại thành một điểm trên bề mặt đó, trong khi đó vòng lặp còn lại có thể co rút được thành một điểm. Tất cả vòng lặp trên mặt cầu có thể co rút lại thành một điểm.

Chúng ta vẫn chưa định nghĩa thế nào là một đa tạp ba chiều. Nếu như các đa tạp hai chiều mô phỏng các thế giới, cac đa tạp ba chiều là những đối tượng toán học mô phỏng các vũ trụ. Có một đa tạp ba chiều đặc biệt đẹp, đó là khối cầu ba chiều, hữu hạn, không biên, và có đặc tính là tất cả các vòng lặp của nó có thể bị co rút lại thành một điểm. Giả thuyết Poincaré khẳng định rằng đây là đa tạp ba chiều hữu hạn đơn liên duy nhất. Điều này có nghĩa là gì, và thế nào là một khối cầu ba chiều?

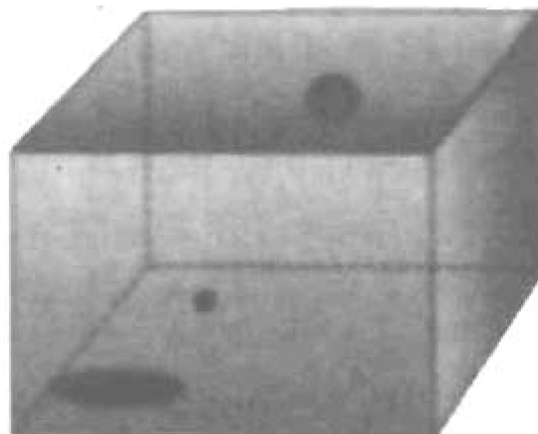
4

Hình dạng vũ trụ

Cũng như trong trường hợp của Trái Đất, một atlas của vũ trụ là một tập hợp của các bản đồ. Nhưng một tấm bản đồ của một vùng trong vũ trụ không thể là một mảnh giấy hình chữ nhật. Thay vào đó, nó giống như một chiếc hộp cứng bằng thủy tinh (hãy nghĩ về một bể cá hoặc một hộp giày trong suốt) chứa đầy tinh thể lỏng không màu, trong đó có các đốm sáng hiện lên tương ứng với vị trí của các hành tinh và ngôi sao. Trong chiếc hộp bản đồ chứa Hệ Mặt Trời của chúng ta, nếu nhìn vào một điểm có khoảng cách tương ứng với 431 năm ánh sáng thẳng từ Trái Đất, bạn sẽ thấy một đốm sáng tương ứng với Polaris, sao Bắc Cực. Nhìn theo chiều ngược với Mặt Trời về các hướng khác nhau trên mặt phẳng chứa quỹ đạo Trái Đất, ta sẽ thấy các hành tinh khác. Về phía Nam của mặt phẳng xích đạo nhìn theo một hướng, với một khoảng cách tương ứng với hơn 4 năm ánh sáng một chút là các hàng xóm gần nhất của chúng ta, Proxima Centauri và ngôi sao đôi Alpha Centauri. Tùy thuộc vào kích thước của hộp-bản đồ này, nhìn ra bên ngoài theo một hướng

khác, cũng ở phía Nam của xích đạo, có trung tâm của thiên hà, cùng với lỗ đen khổng lồ của nó, ở một khoảng cách gần 25.000 năm ánh sáng. Xa hơn nữa ở một hướng khác sẽ là Andromeda, thiên hà xoắn ốc gần chúng ta nhất, cách chúng ta khoảng 2,9 triệu năm ánh sánh.

Một atlas của vũ trụ sẽ là một tập hợp các hộp giày trong suốt như vậy mà mọi khu vực của nó đều được dựng lại bản đồ trong ít nhất một hộp. Nếu như vũ trụ không kéo dài đến vô tận, như nó có vẻ, số lượng các hộp cần thiết để dựng thành một atlas hoàn chỉnh là hữu hạn. Mặc dù vậy, chúng ta vẫn không thể "nhìn thấy" toàn bộ vũ trụ được. Nếu như ta có một atlas hoàn chỉnh của vũ trụ, sao cho mỗi phần của nó đều được dựng thành bản đồ, ta có thể thử lắp ráp các hộp-bản đồ trong suốt của chúng ta lại với nhau. Tương tự như việc không đủ chỗ trên mặt phẳng để đặt tất cả các tấm bản đồ của thế giới chúng ta thành một hình cầu, sẽ không có đủ chỗ trong một không gian thông thường để đặt vào trong đó tất cả các hộp giày-bản đồ một cách ổn thỏa. Ta gặp phải khó



Hình 15. Bản đồ khu vực chứa một thiên hà xoắn ốc nhỏ ở phía dưới đằng trước góc trái.

khăn trong việc hình dung ra hình dạng của vũ trụ một cách tổng thể.

Thêm vào đó, ta không thể thoát ra ngoài vũ trụ. Đây là một khác biệt quan trọng giữa Trái Đất và vũ trụ. Tên lửa có thể ra khỏi bề mặt Trái Đất, giúp chúng ta nhìn thấy Trái Đất từ bên ngoài. Vì chúng ta có hình dung trong không gian ba chiều và bề mặt Trái Đất là hai chiều, ta có thể thấy được hành tinh của chúng ta uốn cong lên theo một chiều thứ ba và dễ dàng nhìn thấy hình dạng hoàn chỉnh của nó. Ngay cả khi ta có khả năng thoát ra ngoài vũ trụ với nỗ lực nhìn xem nó có hình dạng như thế nào, bởi vì vũ trụ là ba chiều, chúng ta cần phải có khả năng hình dung trong một không gian có ít nhất bốn chiều để có thể mường tượng được vũ trụ một cách tổng thể.

Như ta sẽ thấy, điều đó không có nghĩa là vũ trụ không có hình dạng. Cũng không có nghĩa là vũ trụ không thể uốn cong. Nó có thể có rất nhiều hình dạng khác nhau, và một cách gần như chắc chắn, cũng giống với trường hợp của bề mặt Trái Đất, vũ trụ cũng uốn cong một cách khác nhau ở các vị trí khác nhau.

Mặc dù vũ trụ lớn hơn rất nhiều so với Trái Đất, công việc nghiên cứu vũ trụ có một số lợi thế rõ ràng mà những đồ đệ của Pythagoras không có khi họ nghiên cứu bề mặt của hành tinh chúng ta. Không giống như với Trái Đất - nơi mà tầm nhìn của chúng ta bị cắt đứt bởi một đường chân trời rất hẹp làm ta phải di chuyển để vẽ bản đồ của một vùng có độ rộng vừa phải, với vũ trụ nhờ việc sử dụng kính thiên văn ta có thể nhìn vào bên trong nó

với một khoảng cách rất lớn. Chúng ta cũng có kết quả đo đạc khá chính xác các khoảng cách đến những vật thể khác nhau mà ta nhìn thấy trên bầu trời. Vì vậy, ta có thể dựng lại bản đồ cho một khu vực khá rộng của vũ trụ mà không cần phải du hành bên ngoài Trái Đất. Toán học cũng phát triển hơn nhiều so với thời đại của Columbus, và có nhiều công cụ toán học mạnh mẽ có thể được sử dụng để tác động đến câu hỏi về hình dạng của vũ trụ.

VŨ TRỤ HỮU HẠN

Tuy người Hi Lạp tin rằng Trái Đất có hình mặt cầu, nhiều người trong số họ cảm thấy vũ trụ kéo dài đến vô tận. Ví dụ, luận bàn của Archytas, nhà toán học rất tài năng của trường phái Pythagoras và là bạn của Plato về đề tài này.

> Nếu tôi ra được bên ngoài, lên trên bầu trời với các ngôi sao cố định, tôi có thể dang tay hoặc vung cây gậy của tôi ra bên ngoài được không? Giả sử được thì tức là bên ngoài đó phải là một vật thể hoặc không gian khác (không có sự khác biệt giữa vật thể và không gian như chúng ta sẽ thấy sau đây). Sau đó ta lại đi ra ngoài không gian mới đó thêm lần nữa theo cùng một cách, và cứ tiếp tục như vậy, ở mỗi giới hạn mới ta lại hỏi cùng một câu hỏi. Nếu luôn tồn tại một địa điểm mới mà cây gậy của tôi có thể vung ra được, vậy rõ ràng là nó mở rộng không có giới hạn. Nếu như đối tượng mở rộng liên tục đó là một vật thể thì mệnh đề đã được chứng minh. Còn đối với không gian, vì không gian chứa vật thể hoặc là chính

> vật thể, nhất là khi vật thể vô hạn, thì cho dù bản chất của nó là gì đi nữa thì nó cũng mở rộng giống như những vật thể và không gian chứa trong nó.[28]

Archytas lập luận rằng vũ trụ là vô biên - ông cho rằng đứng bất cứ nơi nào trong vũ trụ, khi ta nhìn lên bầu trời, ngoài những vật thể mà nó chứa đựng, vũ trụ nơi nào cũng có vẻ giống nhau. Ta sẽ không nhìn thấy bất cứ một vạch lề nào cả, - ở bất cứ đâu, ta cũng có thể dang tay hoặc vung một cây gậy ra. Vì không có ranh giới, ông kết luận một cách sai lầm là vũ trụ vô tận. Để xem tại sao suy luận của ông là không chắc chắn, hãy chú ý rằng chúng ta có thể lặp lại cùng một suy luận như vậy trên bề mặt của Trái Đất. Khi ta đứng ở ngoài trời, ở bất cứ nơi nào trên hành tinh này, chúng ta có thể dang tay hoặc vung gậy theo chiều ngang và không có bất cứ rào chắn nào ngăn cản chúng ta nối dài cơ thể của mình theo cách này. Không có biên, không có lề. Nếu kết luận của Archytas đúng, Trái Đất sẽ kéo dài một cách vô tận ra tất cả các hướng. Nhưng không. Trái Đất là một mặt cầu (Hoặc thậm chí nó có thể là một hình xuyến). Nói rằng vũ trụ không có biên không đồng nghĩa với việc nói rằng nó kéo dài một cách vô tận, cũng như vậy, nói rằng Trái Đất không có lề không có nghĩa ta đang nói rằng nó kéo dài mãi mãi.

Vũ trụ có thể kéo dài mãi mãi, nhưng điều này có vẻ rất không chắc chắn. Không gian và vật chất có liên hệ

[28] Lập luận trích dẫn trong sách *Physics* của Simplicius, bản dịch tiếng Anh trong sách *A history of Greek Mathematics* của T L. Heath, 2 tập (Oxford: Nhà xuất bản Clarendon, 1921).

mật thiết, và sự khẳng định rằng có một lượng vật chất vô hạn trong vũ trụ gây ra vấn đề nghiêm trọng về mặt lí thuyết. Vũ trụ cũng có thể có một loại biên nào đó, nhưng lập luận theo cách này cũng giống như việc giả sử rằng Trái Đất là một hình đĩa có một cạnh rìa mà tại đó ta có thể bị rơi ra ngoài. Một số ít các nhà khoa học mặc dù có kiến thức toán học vẫn tin tưởng giả thuyết này một cách nghiêm túc.

Cũng như vô số hình dạng mà Trái Đất có thể có (mặt cầu, hình xuyến, tổng liên thông của hai hình xuyến, v.v.), vũ trụ cũng có thể có nhiều hình dạng khác nhau. Nhiều vô kể. Không giống như trường hợp của các bề mặt, chúng ta thậm chí thực sự không nắm được một sự phân loại của tất cả các hình dạng khả dĩ của vũ trụ.

Khi bàn về kích thước và hình dạng của vũ trụ, chúng ta ở đúng vào hoàn cảnh của Columbus năm 1492. Thời của Columbus không có bản đồ hoàn chỉnh của Trái Đất, cũng như vậy, ngày nay ta cũng không có bản đồ hoàn chỉnh của vũ trụ. Nếu chúng ta rời khỏi Trái Đất trên một tàu vũ trụ có tốc độ rất cao, tiến theo một hướng cố định (và hãy cẩn thận để không va vào các hành tinh hay ngôi sao khác), sau một thời gian rất dài, hầu hết các nhà vũ trụ học và toán học đều tin rằng, chúng ta sẽ trở lại gần với nơi mà chúng ta bắt đầu. Tất nhiên, con đường phải đi là rất dài và tốc độ ánh sáng dường như đặt một giới hạn lớn hơn tốc độ mà chúng ta có thể di chuyển về mặt vật lí, nhưng phát biểu cho rằng đi ra ngoài Trái Đất theo một hướng không đổi sẽ làm ta quay trở lại điểm xuất phát cũng không quá vô nghĩa hoặc nghịch lí hơn so

với tuyên bố của Erastosthenes, hay của John Mandeville 1700 năm sau, cho rằng việc đi bằng thuyền buồm về phía tây từ Tây Ban Nha sẽ đem chúng ta quay lại nơi bắt đầu. Và, cũng như thời của Columbus, hiện nay đang có nhiều ước khác nhau về khoảng cách mà chúng ta phải đi trước khi quay trở về.

ĐA TẠP BẬC BA

Vì không thể nhìn thấy không gian nào có số chiều nhiều hơn ba và không thể đi ra ngoài vũ trụ, chúng ta gặp rắc rối khi hình dung hình dạng của toàn bộ vũ trụ. Ở đây, vấn đề thậm chí còn phức tạp hơn nhiều so với trường hợp của các bề mặt, chúng ta cần phải lập luận chính xác về những gì mà chúng ta đang nói. Điều sẽ được ghi nhớ từ chương trước nói rằng, đa tạp hai chiều là một đối tượng toán học chia sẻ các tính chất chủ đạo với bề mặt của Trái Đất. Cụ thể là tất cả các khu vực đều có thể được chiếu lên một mảnh giấy. Vì vậy, nếu ta tưởng tượng mình là một vật thể rất nhỏ nằm tại một điểm bất kì của đa tạp hai chiều, khu vực xung quanh ta sẽ có vẻ như kéo dài đến vô tận, làm ta tưởng như đang sống trên một mặt phẳng. Một mặt cầu và một hình xuyến là những ví dụ đặc biệt của đa tạp hai chiều, và chúng ta bàn về các hình dạng có thể của Trái Đất trong giới hạn của các đa tạp hai chiều khác nhau. Các đa tạp hai chiều là những đối tượng toán học mô phỏng các thế giới khả dĩ.

Đối tượng toán học tương ứng mô phỏng vũ trụ của chúng ta là một *đa tạp ba chiều*, hoặc *một đa tạp bậc ba*. Đó là một tập hợp mà trong đó mỗi điểm của nó thuộc về một khu vực có thể được chiếu lên những điểm nằm trong một bể cá hoặc một hộp giày trong suốt. Nói cách khác, các khu vực xung quanh một điểm bất kì trông giống như không gian chứ không phải là một mặt phẳng. Cũng như trước đây, chúng ta nói rằng một atlas là một tập hợp có tính *hoàn chỉnh* các bản đồ, theo nghĩa, mỗi điểm bất kì trong một khu vực phải được bao phủ bởi một trong số các bản đồ đó. Một đa tạp bậc ba là một đối tượng được bao phủ bởi tất cả các bản đồ trong một atlas.

Trong số các đa tạp bậc ba, phần nào dễ hình dung hơn cả là các đa tạp bậc ba hữu biên. Ví dụ như một quả bóng đặc: hãy nghĩ đến Trái Đất, bây giờ không chỉ chứa mỗi bề mặt của nó, mà còn tất cả mọi thứ bên trong nó. Nếu một người ở bên trong Trái Đất, anh ta sẽ có thể vẽ bản đồ của tất cả các điểm xung quanh anh ta bằng cách cho tương ứng chúng với các điểm bên trong một bể cá. Biên chính là bề mặt, cụ thể là một mặt cầu hai chiều. Tương tự, một hình xuyến đặc cũng là một đa tạp bậc ba hữu biên. Hãy nghĩ đến một chiếc bánh rán hoặc một chiếc nhẫn hình xuyến: biên một lần nữa lại là một đa tạp hai chiều, nhưng lần này là một hình xuyến. Nếu ai đó ở trong hình xuyến đặc, không phải trên bề mặt, anh ta có thể vẽ bản đồ các điểm xung quanh anh ta bằng cách cho tương ứng chúng với các điểm bên trong một bể cá.

Nếu bạn có hai đa tạp bậc ba hữu biên và biên của chúng (là các đa tạp hai chiều) đồng phôi với nhau (ví

dụ, nếu mỗi biên là một mặt cầu), thì ta có thể dính chúng với nhau dọc theo hai biên bằng cách đánh giá rằng các điểm tương ứng với nhau theo một phép đồng phôi cụ thể giữa hai biên là giống nhau (các điểm không nằm trên cả hai biên giữ nguyên tình trạng khác nhau). Đối tượng toán học mới được tạo thành là một đa tạp bậc ba hữu biên, bởi vì các điểm trên biên cũ không còn là điểm trên biên nữa. Tại một điểm trước đó nằm trên biên, vùng bên này thuộc về một đa tạp, vùng bên kia thuộc về đa tạp còn lại, và vì vậy ta có thể đi từ bên này qua bên kia. Nói cách khác, tại một điểm trên biên cũ, khu vực xung quanh ta bây giờ đã được lấp đầy bởi các điểm của một trong hai đa tạp, và ta có thể vẽ bản đồ cho nó bằng cách sử dụng một chiếc hộp giày đặc.

Cũng như trường hợp của các bề mặt, hai đa tạp bậc ba *giống nhau về mặt topo học* nếu như tất cả các điểm của một đa tạp có thể được đặt trong một phép tương ứng một-một mang tính liên tục với tất cả các điểm của một đa tạp khác (Xin nhớ rằng, *liên tục* là một thuật ngữ chuyên ngành mô tả khái niệm các điểm gần nhau này tương ứng với các điểm gần nhau khác.[21]) Hai đa tạp bậc ba giống nhau về mặt topo học còn được gọi là *đồng phôi*, và phép cho tương ứng một-một, thiết lập sự giống nhau giữa chúng còn được gọi là phép đồng phôi.

---

[21] Nói một cách chuyên môn hơn, một tương ứng một-một giữa hai đa tạp ba là *liên tục* nếu lúc nào ta cũng tìm ra được một tập hợp điểm tiến về một điểm trên một đa tạp tương ứng với một tập hợp điểm tiến về một điểm trên đa tạp kia.

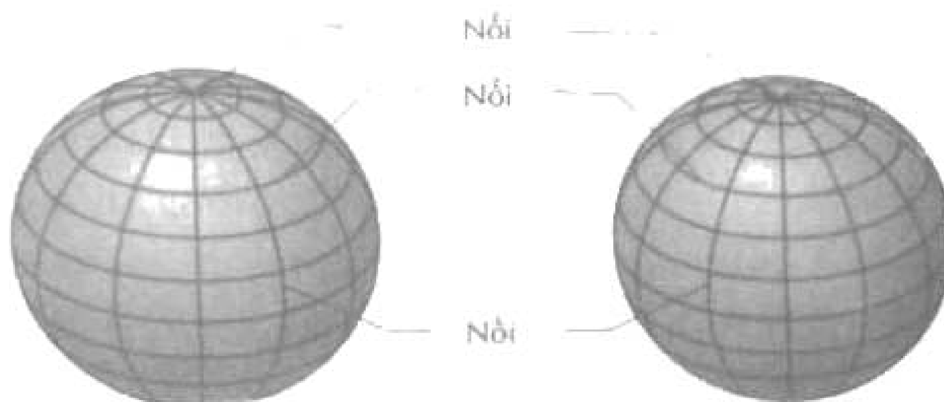
Một đa tạp ba chiều được gọi là *compac* hoặc *hữu hạn* nếu nó có một atlas có số lượng hữu hạn các bản đồ. Một không gian ba chiều tương tự như không gian Euclid[30] kéo dài đến vô tận là một đa tạp ba chiều vô hạn. Đa tạp bậc ba hữu hạn đơn giản nhất là khối cầu ba chiều, hoặc khối cầu bậc ba.

KHỐI CẦU BẬC BA

Hãy xem xét hai quả cầu đặc (Hình 16). Mỗi quả cầu có biên là một mặt cầu hai chiều và bao gồm khu vực bên trong. Bây giờ, tưởng tượng rằng hai quả cầu được dán với nhau dọc theo biên của chúng. Nghĩa là, chúng ta tuyên bố rằng hai điểm tương ứng với nhau trên các mặt cầu biên thực ra hoàn toàn giống nhau. Chúng ta không thể một cách vật lí dán các mặt cầu biên với nhau trong không gian ba chiều, nhưng điều này không nghiêm trọng. Chúng ta vẫn có thể tưởng tượng một cách chính xác cuộc sống trong một vũ trụ như vậy sẽ có vẻ gì. Khi chúng ta đi hay nhìn xuyên qua mặt cầu vốn trước đó là biên của một quả cầu, rồi chúng ta tiếp tục đi sang bên phải đến quả cầu kia. Chung ta sẽ không thấy một sự ngắt quãng nào cả. Điều này cũng giống như khi chúng ta đi ngang qua đường xích đạo trên Trái Đất hai chiều của chúng ta, chúng ta có thể nhìn xuyên qua một cách dễ dàng mà không có một đường thực sự nào ở đấy cả.

---

[30] Không gian tương tự như không gian Eulcid được gọi là không gian ba chiều Euclid hay đơn giản là không gian ba chiều. Định nghĩa chính xác hơn sẽ được đề cập trong Chương 7.

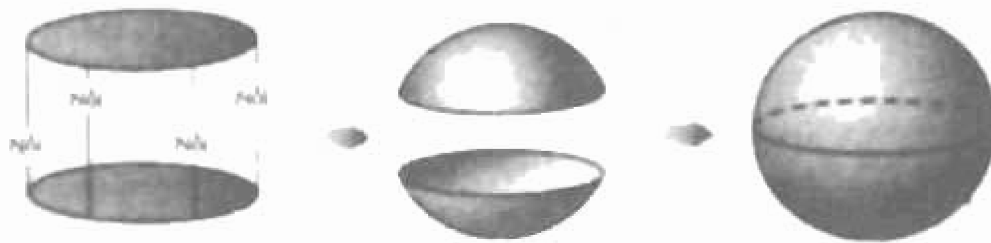


Hình 16. Nối các điểm tương ứng trên biên của từng quả cầu đặc cho ra một khối cầu bậc ba.

Hãy nhớ rằng, ở tại điểm bất kì nào trong vũ trụ, ta cũng có thể dựng bản đồ cho khu vực xung quanh ta bằng cách sử dụng phần bên trong của các chiếc hộp như đã nói ở trên. Ta có thể tư duy về cấu trúc này của vũ trụ theo một cách khác, đó là xem các quả cầu đặc như là các bản đồ - điều mà ta đã làm ban đầu với những chiếc hộp-bản đồ, nhưng giờ đây những chiếc hộp giày trong suốt được thay thế bằng những quả cầu trong suốt. Hãy hình dung rằng mỗi quả cầu là bản đồ của một nửa vũ trụ. Nghĩa là, các thiên hà cũng như các nebulae được chiếu vào trong mỗi quả bóng, nhưng mỗi nửa vũ trụ hoàn toàn khác nhau ngoại trừ các đối tượng nằm trên biên của quả cầu tương ứng với nó.

Chú ý rằng một phép dựng tương tự đã được áp dụng đối với hai đĩa tròn (chúng bao gồm hai vòng tròn, trong không gian hai chiều, và vùng bên trong vòng tròn đó) cho ta một mặt cầu hai chiều. Những chiếc đĩa này, theo cách đó, tạo thành hai nửa bán cầu trên mặt cầu hai

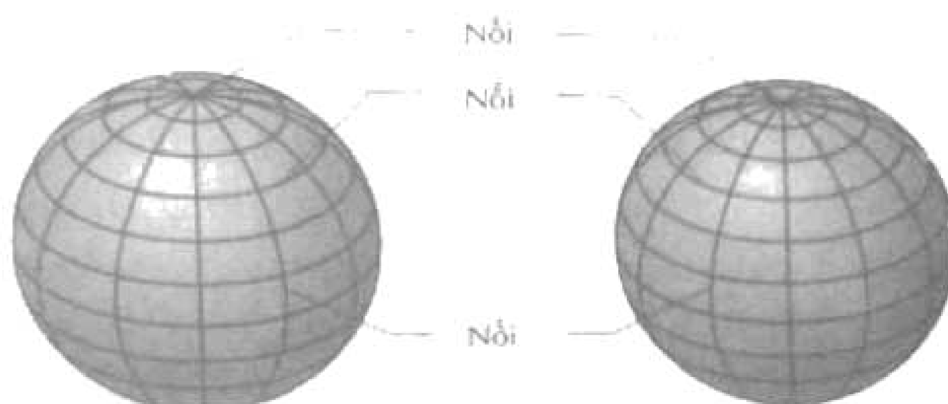
chiều (xem Hình 17). Mặt cầu hai chiều này được tạo ra bằng cách dán các biên của hai chiếc đĩa này với nhau. Ở đây, chúng ta có một lợi thế: ta có thể tách những chiếc đĩa này ra khỏi mặt phẳng để tưởng tượng chúng trong không gian ba chiều nơi mà ta không gặp khó khăn gì trong việc hình dung sự hàn gắn này.



Hình 17. Gắn kết các vòng tròn biên của hai đĩa (hai chiều) cho ra một mặt cầu hai chiều.

Ở trường hợp này cũng vậy, việc xem các hình đĩa này là các bản đồ cũng có lợi ích của nó. Thật vậy, người ta thường biểu diễn Trái Đất của chúng ta bằng cách dùng các hình đĩa có biên là các vòng tròn, chứ không dùng hai bản đồ hình chữ nhật. Hình 18 nêu ví dụ của một cách biểu diễn như vậy trong đó một đĩa đại diện cho bán cầu có chứa châu Mĩ, và một đĩa khác biểu diễn bán cầu đối diện bao gồm châu Âu, châu Á, châu Phi, và châu Úc.

Chúng ta gặp khó khăn hơn khi hình dung một cách toàn bộ khối cầu bậc ba bởi vì chúng ta thiếu mất một chiều nữa-để theo chiều đó thoát ra bên ngoài khối cầu này. Trong trường hợp này của khối cầu bậc ba, các bán cầu không còn là những đĩa hai chiều có biên, mà là hai quả cầu đặc, có biên chung, và biên chung đó không còn là một vòng tròn nữa, mà là một mặt cầu hai chiều.



Hình 16. Nối các điểm tương ứng trên biên của từng quả cầu đặc cho ra một khối cầu bậc ba.

Hãy nhớ rằng, ở tại điểm bất kì nào trong vũ trụ, ta cũng có thể dựng bản đồ cho khu vực xung quanh ta bằng cách sử dụng phần bên trong của các chiếc hộp như đã nói ở trên. Ta có thể tư duy về cấu trúc này của vũ trụ theo một cách khác, đó là xem các quả cầu đặc như là các bản đồ - điều mà ta đã làm ban đầu với những chiếc hộp-bản đồ, nhưng giờ đây những chiếc hộp giày trong suốt được thay thế bằng những quả cầu trong suốt. Hãy hình dung rằng mỗi quả cầu là bản đồ của một nửa vũ trụ. Nghĩa là, các thiên hà cũng như các nebulae được chiếu vào trong mỗi quả bóng, nhưng mỗi nửa vũ trụ hoàn toàn khác nhau ngoại trừ các đối tượng nằm trên biên của quả cầu tương ứng với nó.

Chú ý rằng một phép dựng tương tự đã được áp dụng đối với hai đĩa tròn (chúng bao gồm hai vòng tròn, trong không gian hai chiều, và vùng bên trong vòng tròn đó) cho ta một mặt cầu hai chiều. Những chiếc đĩa này, theo cách đó, tạo thành hai nửa bán cầu trên mặt cầu hai

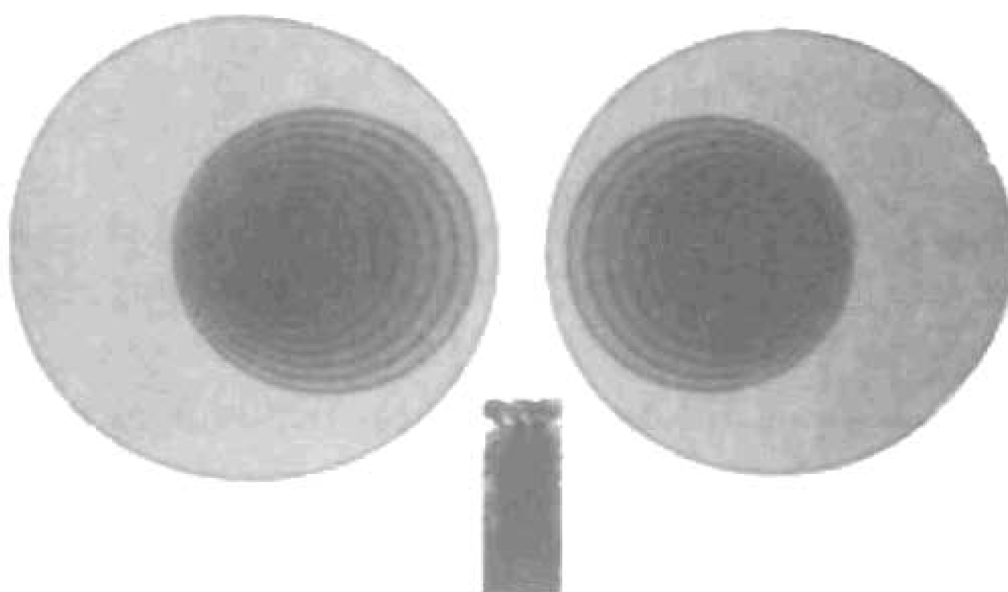


Hình 18. Bản đồ gồm hai bán cầu.

Một số học giả đã lập luận một cách thuyết phục rằng vũ trụ tưởng tượng trong *Thần khúc* của nhà thơ, nhà văn vĩ đại người Ý Dante Alighieri (1261-1321) là một khối cầu bậc ba (tất nhiên là ông không gọi nó theo cách đó).[31] Trong khúc "Thiên đường" (Paradiso), ông trèo lên từ địa ngục ở tâm của Trái Đất, tới bề mặt của Trái Đất, xuyên qua các lớp vỏ hình cầu đồng tâm nơi chứa các hành tinh khác, vượt xa vỏ cầu trên cùng có chứa các ngôi sao cố định để tiến đến tầng thiên đường thứ chín hay còn gọi là Primum Mobile. Trên đỉnh của Primum Mobile, cùng với tình yêu của mình - Beatrice, ông nhìn xuống nửa vũ trụ mà ông đã vượt qua, và nhìn lên nửa vũ trụ của Thiên Đường - gồm các lớp vỏ hình cầu đồng tâm mà trên đó các

[31] Xem thêm M. Peterson, "Dante and the 3-sphere," *American Journal of Physics* 47 (1979); R. Osserman, *Poetry of the Universe* (Garden City, NY: Doubleday, 1995), *Klassische Stücke der Mathematik* (Zürich: Verlag Orell Fuselli, 1925); J. J. Callahan, "The Curvature of Space in a Finite Universe", *Scientific American* 235 (August 1976).

thiên sứ, các tổng thiên sứ và các bậc thiên thần cao hơn nữa sinh sống. Mặt cầu hai chiều trên rìa của lớp vỏ hình cầu Primum Mobile là mặt cầu xích đạo mà từ đó ông và Beatrice quan sát toàn bộ vũ trụ. Trái Đất (và địa ngục ở trung tâm của Trái Đất) nằm ở một cực. Cực kia là lãnh địa của các Seraphim (các thiên thần có phẩm hàm cao nhất, hoặc thân gần nhất với Đức Chúa).

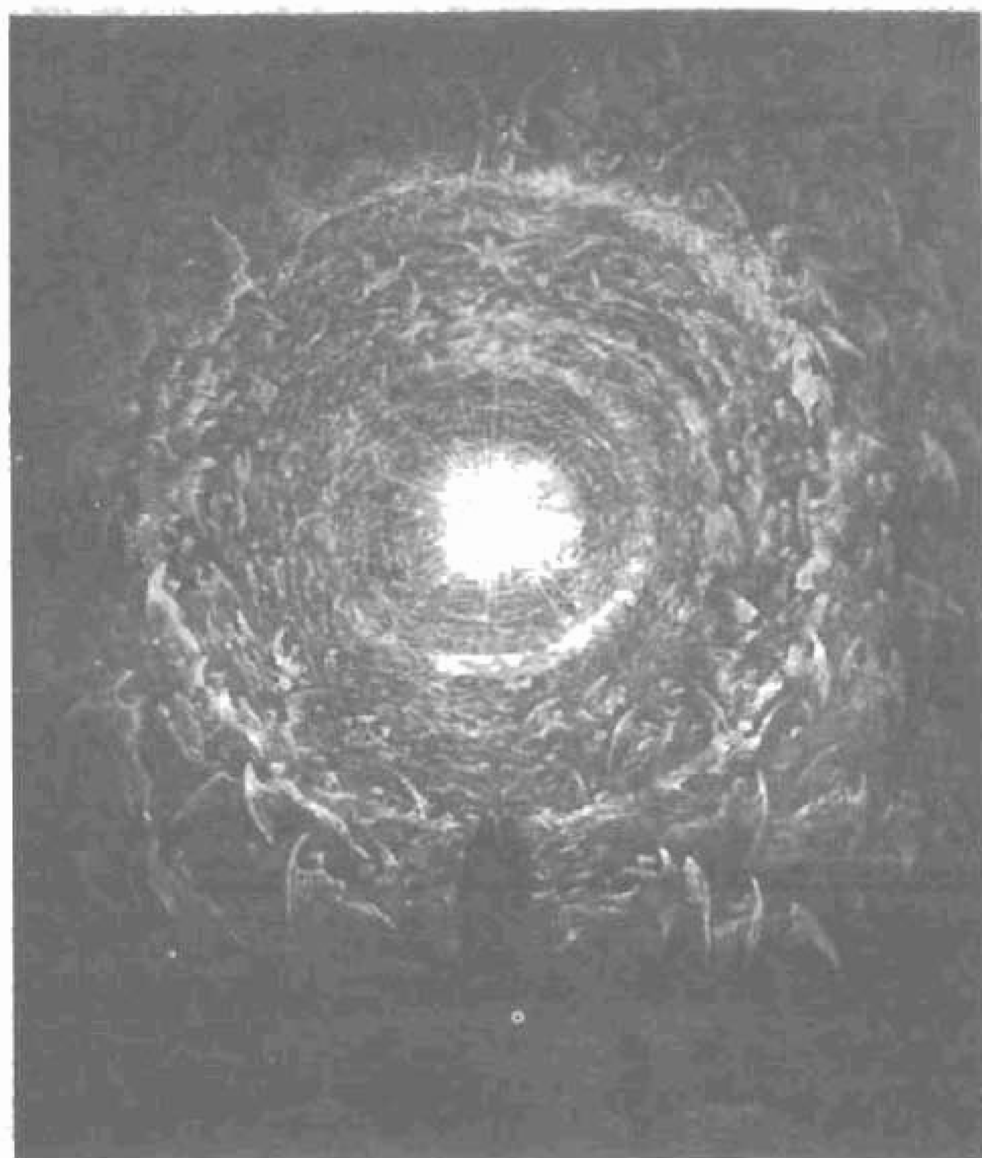


Hình 19. Dante và Beatrice (giữa) nhìn chăm chú vào hai nửa của vũ trụ. Ở bên trái là một lát cắt hiển thị các vỏ hình cầu đồng tâm của Bán-vũ trụ nhìn thấy được: Hình cầu ngoài cùng là Primum Mobile (tại đó Dante và nàng thơ của mình đang đứng), sau đó là vỏ cầu của các ngôi sao cố định, tiếp theo là vỏ cầu của sao Thổ, sao Mộc, sao Hỏa, Mặt Trời, sao Kim, sao Thủy, Mặt Trăng, và cuối cùng Trái Đất ở trung tâm. Bên phải là Thiên Giới, tức vũ trụ của thiên thần bao phủ bởi các vỏ cầu của thiên sứ, tổng thiên sứ, vương hầu, thế lực đức hạnh, quyền thống trị, vương quyền, tiểu cherabin, và hình cầu của các Seraphim tại trung tâm.

Trong Hình 19, mỗi bên biểu diễn cho một quả cầu đặc mà chúng tôi đã cắt ra một hình nón để chúng ta có thể nhìn vào bên trong. Trái Đất thuộc về trung tâm của

quả cầu bên trái và lãnh địa của các Seraphim ở trung tâm của quả cầu bên phải. Gustav Doré đã vẽ một bức tranh đáng yêu mô tả Dante và Beatrice (Hình 20) đang nhìn lên phần vũ trụ thuộc về Thiên đường, với lãnh địa của các Seraphim nằm xa xa phía trung tâm. Thật không may, bức tranh đã không biểu diễn điều này một cách chính xác - thay vì các vỏ cầu đồng tâm, Doré đã vẽ những vòng tròn các thiên thần. Sẽ đúng hơn nếu thay vào đó, chúng ta tưởng tượng Dante và Beatrice đang nhìn xuống một góc mở hình nón hướng đến Thiên đường rực sáng, tức là trung tâm của hình cầu đặc mà họ đang nhìn vào, nếu chúng ta hiểu những vòng tròn các thiên thần là các cạnh tròn mà nhát cắt tạo ra khi xuyên qua các vỏ cầu. Các vỏ cầu này tạo thành các lớp vỏ bọc bắt đầu từ phía người chiêm ngưỡng kéo dài ra xa phía sau của trung tâm đang rực sáng.

Khối cầu bậc ba là hữu hạn. Ta có thể dùng một số hữu hạn các bản đồ hình hộp để bao phủ tất cả các khu vực trong hai quả cầu đặc mà chúng ta đã dán biên với nhau (Tất nhiên, một số bản đồ sẽ phải bao gồm một phần nào đó thuộc về cả hai quả cầu.). Hơn thế nữa, ta có thể có các khối cầu bậc ba với đủ các kích cỡ khác nhau. Chúng ta có thể tùy ý thích định ra kích cỡ lớn hay nhỏ cho các quả cầu mà chúng ta đã gắn biên với nhau.



Hình 20. Bức họa Dante và Beatrice đang ngắm nhìn bán cầu thiên đường.

Cuối cùng - điều này đòi hỏi phải tinh tế hơn một chút để nhận ra: tất cả các vòng lặp của một khối cầu bậc ba có thể bị co rút thành một điểm. Để hiểu điều này, hãy tưởng tượng chúng ta đang sống trong một khối cầu bậc ba mà Hình 16 biểu diễn và thực hiện một chuyến khứ hồi, đồng thời kéo theo sợi dây câu trong suốt hành trình. Chẳng hạn, ta có thể bắt đầu từ một điểm bất kì nằm xa

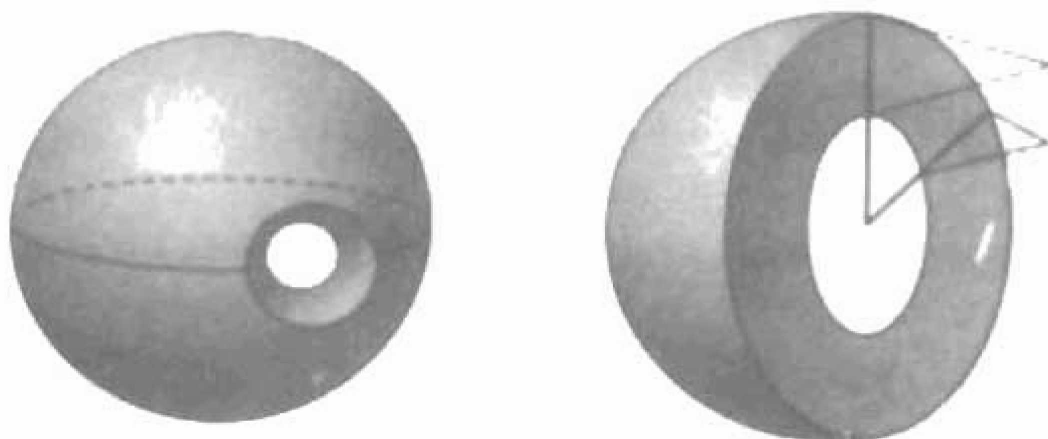
phía trong quả cầu bên trái, đi ra ngoài cho đến khi ta đến biên, sau đó đi vào quả cầu bên phải, tiếp tục đi cho đến khi ta gặp biên bên kia của quả cầu này - điểm mà ta có thể từ đó bước sang qua cầu bên trái để trở về điểm khởi hành bên quả cầu bên trái, và cuối cùng kéo sợi dây lại phía mình. Mặc dù ta đã cố định một đầu dây vào điểm khởi hành, không gì có thể ngăn ta túm sợi dây lại, đồng thời tạo ra các vòng lặp mỗi lúc một nhỏ dần, và có cùng điểm đầu và điểm cuối - điểm mà ta xuất phát, cuối cùng, các vòng lặp này hoàn toàn nằm trong quả cầu bên trái và chúng ta có thể cứ tiếp tục kéo sợi dây về phía mình như thế cho đến khi nó co rút vào điểm khởi hành. Vì vậy, khối cầu bậc ba, cũng đơn liên giống như mặt cầu hai chiều: tất cả các vòng lặp của nó có thể co rút thành một điểm.

CÁC ĐA TẠP BẬC BA COMPAC KHÁC

Còn có rất nhiều đa tạp bậc ba compac khác ngoài khối cầu bậc ba. Ví dụ, hãy xem xét một lớp vỏ cầu đặc được tạo nên bởi khu vực nằm giữa hai quả cầu đồng tâm. Với tâm hồn ăn uống, hãy nghĩ đến "thịt" của quả bơ: phần có thể ăn được nằm giữa hột bơ ở bên trong và lớp vỏ bơ ở bên ngoài. Đây là một đa tạp bậc ba hữu biên, với biên bao gồm hai mặt cầu hai chiều. Nếu chúng ta thử hình dung ra việc dán mặt cầu bên trong với mặt cầu bên ngoài bằng cách kết hợp mọi điểm trên mặt cầu bên trong với điểm gần nó nhất nằm trên mặt cầu bên ngoài (nói

cách khác, kết hợp mọi điểm trên mặt cầu - biên bên ngoài với điểm nằm trên đường thẳng nối nó với tâm, trên mặt cầu biên trong), ta sẽ thu được một đa tạp bậc ba không có biên.

Để hình dung cuộc sống trong một vũ trụ có hình dạng này, hãy tưởng tượng ta là những con người rất nhỏ bé trôi nổi bên trong các vỏ cầu cực lớn và là chủ thể của dự đoán sau đây: nếu ta đi từ trong ra ngoài, xuyên qua mặt cầu bậc hai bên ngoài, thì chúng ta sẽ không rời khỏi vỏ cầu, mà ngay lập tức quay trở lại thông qua mặt cầu bậc hai bên trong. Tất nhiên, chúng ta sẽ không thể nhìn thấy được gì bên ngoài vũ trụ đó bởi vì mặt cầu - biên bên trong giờ đây cũng là mặt cầu - biên bên ngoài (xem Hình 21). Chúng ta cũng không thể nhìn thấy những "biên" mặt cầu này: nhìn ra phía ngoài mặt cầu bên ngoài đồng nghĩa với việc nhìn vào phía trong mặt cầu bên trong. Thực ra, các "biên" mặt cầu này là các đối tượng giả tưởng trong cấu trúc: dưới góc nhìn của một người sống trong đa tạp thì chúng không tồn tại. Ở bất kì điểm nào, nếu nhìn ra xung quanh, chúng ta sẽ cảm thấy như mình đang trôi nổi trong một khu vực của không gian ba chiều Euclid, và thực ra một bản đồ có thể biểu diễn khu vực xung quanh chúng ta. Mặc dù tập hợp này, rất lớn nhưng bởi vì nó không vô hạn, cho nên chúng ta có thể xây dựng được một atlas gồm một số lượng lớn và hữu hạn các bản đồ có dạng hình hộp biểu diễn mọi khu vực.



Hình 21. Kết nối từng điểm trên biên - mặt cầu bên trong với điểm tương ứng nằm trên cùng một đường thẳng nối tâm và nằm trên biên - mặt cầu bên ngoài sẽ cho ta một đa tạp-bậc ba-không biên.

Sự khác biệt giữa việc sống trong đa tạp này với việc sống trong khối cầu bậc ba chỉ xuất hiện khi ta nhìn nhận sự việc một cách tổng thể. Nếu chúng ta, dọc theo một đường thẳng xuyên tâm, đi ra ngoài, ta sẽ trở về nơi xuất phát. Như vậy, ta vừa thực hiện một vòng khép kín. Hãy tưởng tượng chúng ta để lại một sợi dây trong suốt quãng đường đã đi, thì chúng ta sẽ không có cách nào để nhồi nhét nó vào một điểm cả. Vòng dây này không thể co lại ngắn hơn khoảng cách giữa hai mặt cầu hai chiều bên trong và bên ngoài ban đầu - trước khi chúng được đồng nhất hóa để tạo nên đa tạp này. Vì vậy, đa tạp này chắc chắn phải khác với khối cầu bậc ba.

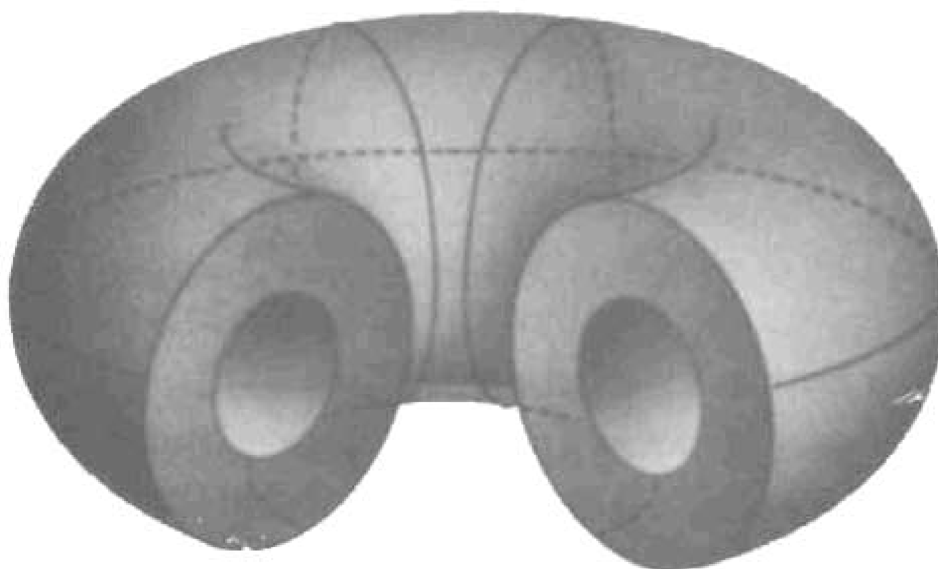
Ở một số khía cạnh khác, đa tạp này cũng chia sẻ những điểm chung với một khối cầu bậc ba. Nó không chứa bức tường chắn nào cả, nhưng là hữu hạn. Đi theo bất kì hướng nào, ta cũng trở lại gần nơi xuất phát. Đó là một vũ trụ khả dĩ. Ta có thể bác bỏ rằng đa tạp này không

thực sự tồn tại, bởi vì chúng ta không thể kết nối một cách vật lí hai biên - mặt cầu bên trong và bên ngoài. Nhưng luận cứ này đã bỏ qua một điểm quan trọng: việc dùng trí tưởng tượng để kết nối hai biên - mặt cầu bên trong và bên ngoài chỉ là cách giúp chúng ta hình dung được đa tạp này. Đa tạp này là một đối tượng cơ bản, và chẳng ai thắc mắc về sự tồn tại của đối tượng toán học này. Chúng ta không biết liệu đó có phải là hình dạng của vũ trụ chúng ta hay không. Cũng giống như khối cầu bậc ba, đa tạp này là một hình dạng khả dĩ của vũ trụ mà chúng ta đang sinh sống trong đó.

Một ví dụ khác trong số các đa tạp bậc ba là một khối hình hộp chữ nhật đặc (hay bể cá). Biên của nó gồm sáu mặt, bao gồm ba cặp hình chữ nhật song song. Giả sử chúng ta kết nối hai mặt đối diện bằng cách xem hai điểm đối diện ở mỗi mặt là một điểm duy nhất. Nghĩa là, nếu chúng ta đi ra từ phía bên phải, chúng ta sẽ trở lại từ phía bên trái; ra ngoài qua nóc hộp sẽ quay lại từ phía đáy hộp; và ra ngoài qua mặt sau, sẽ trở về qua mặt trước. Một lần nữa, chúng tôi phải nhấn mạnh rằng đa tạp mới tạo ra không có biên - nếu chúng ta bay vòng quanh đa tạp này, chúng ta sẽ không bao giờ chạm phải một bức tường chắn nào cả và cũng chẳng bao giờ thoát ra khỏi nó. Điều này nghe có vẻ thái quá. Nhưng không. Trong chương trước, chúng ta đã thấy rằng, thật dễ dàng để tưởng tượng ra một thế giới mà bản đồ của nó có đặc điểm là: các địa điểm xuất hiện trên lề trái đồng nhất với các điểm nằm trên lề phải, và những điểm nằm trên lề trên cùng đồng nhất với những điểm ở trên lề dưới cùng.

Một thế giới như vậy có hình dạng của một hình xuyến hai chiều. Đối tượng ba chiều tương đương được hình thành bằng cách kết nối các mặt đối diện của một khối hộp chữ nhật rắn được gọi là khối hình xuyến ba chiều, hoặc ngắn gọn hơn là khối xuyến bậc ba.

Cách biểu diễn hình xuyến hai chiều như là một hình chữ nhật với các mặt đối diện dính vào nhau đem lại cho chúng ta một phương thức để tư duy về hình xuyến bậc ba. Hãy xem như là khối hình hộp chữ nhật đặc ban đầu được tạo nên từ vô số các tờ giấy hình chữ nhật đứng sát nhau từ trước ra sau. Nếu ta dán mặt trên của khối hình hộp đặc với mặt dưới, mặt phải với mặt trái, thì một cách tự động, lề trên của mỗi tờ giấy dính với lề dưới của nó, lề bên phải dính với lề bên trái. Nói cách khác, chúng ta tạo nên một vật rắn mới, bao gồm các "thớ" hình xuyến hai chiều chụm vào nhau. Chúng ta có được một *vỏ hình xuyến*: một vùng đặc nằm giữa hai hình xuyến hai chiều, hình này nằm trong hình kia, giống như ta thổi phồng hình xuyến bên trong bằng cách tăng dần bán kính vòng tròn. Biên bao gồm hai hình xuyến hai chiều (tương ứng với tờ giấy ở mặt trước và tờ giấy ở phía sau của chồng giấy). Hãy xem Hình 22. Để có được một khối xuyến bậc ba, chúng ta kết nối hai hình xuyến hai chiều - biên của chiếc vỏ hình xuyến. Nếu chúng ta sống trong đa tạp như vậy, ta có thể tưởng tượng bản thân mình đang sống trong một vỏ hình xuyến, mà ở đó hình xuyến bên ngoài cũng chính là hình xuyến bên trong, vì vậy chúng ta không thể nhìn thấy chúng, và việc đi xuyên qua hình xuyến này sẽ đem ta trở lại bên trong thông qua hình xuyến kia.



Hình 22. Khối xuyến bậc ba được tạo ra bằng cách kết nối các điểm tương ứng trên hình xuyến bên ngoài và bên trong của một vỏ hình xuyến.

Đa tạp này cũng vậy, nó có các quỹ đạo khép kín không thể co rút thành một điểm. Thực vậy, nếu chúng ta bắt đầu từ một điểm ở giữa vỏ hình xuyến và đi thẳng ra hình xuyến bên ngoài, và do đó, quay trở lại vào trong thông qua hình xuyến bên trong, trở lại nơi mà chúng ta xuất phát. Hãy xem Hình 22. Chúng ta không thể co quỹ đạo này lại thành một điểm. Vì vậy, đa tạp này không thể đồng phôi với khối cầu bậc ba nơi mà bất kì vòng lặp nào cũng có thể co rút thành một điểm. Nó cũng không đồng phôi với đa tạp mà chúng ta đã xây dựng bằng cách kết nối các biên bên trong và bên ngoài của một vỏ cầu.[32]

---

[32] Vẽ ra một đường đi trong vũ trụ mà trên đó bạn luôn giữ khoảng cách bằng nhau so với hình xuyến bên trong và bên ngoài nhưng đi trên một vòng tròn vuông góc với trục của hai hình xuyến đồng tâm. Vòng lặp này sẽ cắt ngang một vòng lặp không thể co rút thành một điểm. Hơn thế nữa, vòng lặp này tự do theo nghĩa nó có

Một cách tiện lợi, ý tưởng cơ bản cho việc thực hiện một bản đồ thế giới cũng được áp dụng với vũ trụ. Hãy tưởng tượng ta đã lập bản đồ của toàn bộ vũ trụ sao cho ta có hàng trăm chiếc hộp thủy tinh biểu diễn các ngôi sao và các thiên hà trong các khu vực khác nhau của không gian. Chúng ta hoàn toàn có thể thay đổi tỉ lệ của chúng để sao cho chúng có cùng tỉ lệ và cố gắng kết hợp càng nhiều càng tốt các hộp này với nhau để tạo ra một khối bản đồ lớn của vũ trụ. Nhưng cũng giống với trường hợp của thế giới, chúng ta gặp hạn chế ở việc không thể kết nối các bề mặt nằm ở lề bên này của một số những khối hộp này, với các bề mặt nằm ở lề bên kia của một số khối hộp. Nghĩa là, tương tự với việc chúng ta không thể kết nối những điểm nằm trên các lề của bản đồ thế giới nếu chúng ta vẫn ở trong mặt phẳng hai chiều, chúng ta không thể nào kết nối những bề mặt thuộc về biên bên ngoài của bản đồ vũ trụ nếu chúng ta vẫn ở bên trong không gian của chúng ta. Điều này khó có thể làm chúng ta mất tinh thần. Bởi vì mặt phẳng hai chiều và không gian ba chiều - kéo dài đến vô tận - của hình học sơ cấp cũng là các đối tượng toán học không kém phần trừu tượng so với đa tạp mà chúng ta đang đề cập tới.

---

thể được tạo thành chính xác từ vòng lặp đầu tiên. Trên đa tạp mà ta dựng lên bằng cách xác định biên bên trong và bên ngoài của vỏ cầu, ta không có hai vòng lặp tự do theo nghĩa này mà cả hai đều không thể co rút thành một điểm.

GIẢ THUYẾT POINCARÉ

Chúng ta đã thấy một vài ví dụ về đa tạp bậc ba compac: khối hình xuyến bậc ba, khối cầu bậc ba, và đa tạp mà ta có được bằng cách kết nối các biên bên trong và bên ngoài của một vỏ cầu. Còn rất nhiều loại đa tạp bậc ba khác nữa, thậm chí là vô hạn. Số lượng các đa tạp hai chiều cũng là vô hạn, nhưng chúng đều đã được phân loại. Còn các đa tạp bậc ba thì không. Các đa tạp bậc ba đa dạng hơn rất nhiều và cũng chưa có ai tiến tới gần được việc phân loại toàn bộ chúng. Trí thông minh của con người dường như là vô biên, và một phần lớn đã được dùng để xây dựng các đa tạp bậc ba khác nhau. Chúng ta có thể xây dựng các đa tạp bậc ba bằng cách kết nối các mặt đối diện của các vật rắn thông thường theo những cách khác nhau. Với một đa tạp bậc ba cho trước, ta có thể cắt một khối hình xuyến ra khỏi nó, và dán chúng trở lại với nhau theo một cách khác để tạo ra một đa tạp bậc ba mới, thường là khác với đa tập bậc ba ban đầu. Với hai đa tạp bậc ba cho trước, chúng ta có thể cắt một hình cầu đặc trên mỗi đa tạp, rồi kết nối hai đa tạp hữu biên mới được tạo ra này lại bằng cách đồng nhất các điểm trên hai mặt cầu hai chiều bao quanh hai hình cầu đặc mà chúng ta vừa loại bỏ. Bất kì đa tạp bậc ba nào trong số này đều có thể là hình dạng khả dĩ của vũ trụ. Chúng ta bối rối bởi sự đa dạng của chúng. Có cách nào để chỉ ra ý nghĩa của tất cả chúng không?

Hơn một thế kỉ qua, nhiều cá nhân đã cống hiến cả đời cho công việc thúc đẩy hơn nữa sự hiểu biết của

chúng ta vẻ các đa tạp bậc ba. Nhưng, trớ trêu thay, chỉ riêng một câu hỏi đơn giản nhất trong lĩnh vực này lại đã nằm ngoài tầm với của mọi cố gắng tìm ra lời giải đáp, đó là: Trong số tất cả những đa tạp bậc ba đó, liệu có đa tạp nào khác với khối cầu bậc ba nhưng cũng có chung một tính chất là, tất cả mọi quỹ đạo khép kín trong nó đều có thể co rút thành một điểm? Nếu không có một đa tạp nào như vậy, ta có thể trả lời một cách chắc chắn cho câu hỏi liệu vũ trụ của chúng ta có dạng hình cầu bậc ba hay không, bằng cách sử dụng một atlas hoàn chỉnh để kiểm tra xem mỗi vòng lặp khép kín có thể co rút thành một điểm hay không. Giả thuyết Poincaré khẳng định rằng không có đa tạp nào như vậy. Nói theo một cách khác lí thuyết hơn và cũng chính xác hơn, giả thuyết Poincaré khẳng định rằng, nếu có một đa tạp bậc ba compac mà ở đó, tất cả các quỹ đạo khép kín đều có thể co rút thành một điểm, thì đa tạp đó đồng nhất về mặt topo học (nghĩa là đồng phôi) với khối cầu bậc ba.

Đây chính là câu hỏi đơn giản nhất mà chúng ta có thể đặt ra cho hình dạng khả dĩ của vũ trụ. Tuy nhiên, đó cũng là một câu hỏi đau đớn, và đối với một số người, nó thậm chí là một nỗi ám ảnh và cũng là nguyên nhân hủy hoại cả sự nghiệp của họ. Đây cũng là chủ đề đã thu hút đám đông tại MIT và Stony Brook. Đó cũng là giả thuyết mà Perelman đã giải quyết. Và cũng là một giả thuyết được trao giải thưởng một triệu đô la.

5

Hình học Euclid

Nếu vũ trụ của chúng ta hữu hạn và nó không có vách tường chắn nào cả, phải chăng điều này có nghĩa là nó phải bị bẻ hoặc uốn cong bằng cách nào đó? Nói theo ngôn ngữ đã được sử dụng trong chương trước, phải chăng tất cả các đa tạp bậc ba compac không biên đều bị bẻ cong xung quanh chính nó hay không? Có cách nào khác để chúng ta giải thích cho hiện tượng: nếu chúng ta xuất phát từ một điểm, đi mãi theo một hướng cố định, chúng ta sẽ quay trở về chính điểm xuất phát đó? Bề mặt Trái Đất là hai chiều, theo nghĩa, ta có thể vẽ bản đồ mọi khu vực của nó trên một tờ giấy phẳng - đồng ý - nhưng chẳng phải là ta vẫn cần thêm một chiều khác để có thể uốn cong tờ giấy đó hay sao? Và một điều tương tự liệu có đúng với vũ trụ ba chiều của chúng ta không? Nếu như vũ trụ bị uốn cong - dù điều này có nghĩa là gì đi nữa - nó sẽ cong về hướng nào? Nhưng nếu vũ trụ của chúng ta đã bao gồm tất cả mọi vật rồi thì liệu tồn tại hay không một thứ gì đó khác, để theo đó, nó bị bẻ cong? Tư duy kĩ hơn về điều này, chúng ta sẽ phải tự giải thích "uốn

cong" có nghĩa là gì? Tất cả những câu hỏi trên có ý nghĩa gì không, hay chỉ là một trò chơi chữ với những thuật ngữ không rõ ràng?

Tất cả những câu hỏi này đều mang nhiều ý nghĩa, và thực ra chẳng quan trọng với giả thuyết Poincaré và chứng minh của nó. Chúng cũng là minh họa cho lí do tại sao các nhà toán học cứ cố chấp tuân theo sự chặt chẽ tuyệt đối. Bất cứ khi nào người ta trao đổi với nhau về vấn đề này, họ đều gợi nhớ về những kinh nghiệm đã được chia sẻ và đúc kết sau rất nhiều năm. Chúng ta đều biết một cái li không thể nào rơi xuống xuyên qua mặt bàn, con đường duy nhất để vào một căn nhà là qua cánh cửa của nó, và một người có thể thuận tay phải hoặc tay trái. Chúng ta biết thế nào là phải lòng một ai đó, thế nào là cảm nhận nỗi đau, và để giao tiếp chúng ta không cần phải định nghĩa cho rõ những điều trên. Các đối tượng toán học thì khác, chúng nằm ngoài các kinh nghiệm thông thường. Nếu ta không định nghĩa được chúng một cách rõ ràng, ta không thể sử dụng chúng một cách hiệu quả và không thể trao đổi với người khác về chúng.

Nghệ sĩ và các nhà nghiên cứu khoa học nhân văn thường quen với sự mơ hồ và sự phức tạp. Các nhà toán học thì ngược lại, họ làm việc với nỗi ám ảnh của việc định nghĩa các thuật ngữ, với việc giản lược những ý nghĩa không liên quan. Sự cố chấp gần như đã hằn sâu trong đầu họ về việc phải định nghĩa từng thuật ngữ một cách chặt chẽ, phải chứng minh từng khẳng định - suy cho cùng - đưa lại cho họ sự tự do để tưởng tượng và nói về những điều không tưởng. Hầu hết tất cả mọi người đều gặp một

vài trở ngại do toán học gây ra ở trường trung học, tất cả đều cho rằng toan học là môn học đòi hỏi sự tỉ mỉ và yêu cầu tuân thủ các quy tắc nghiêm ngặt nhất, nhưng một số ít nhận ra rằng làm toán học là công việc tự do nhất và đòi hỏi trí tưởng tượng nhiều nhất trong tất cả hoạt động của con người. Sự chính xác tuyệt đối được trả công bằng sự tự do mơ ước một cách đầy ý nghĩa.

Nhưng, sự chính xác tuyệt đối cũng có giá của nó. Thuật ngữ cần được định nghĩa rõ ràng, các mệnh đề mặc dù rất rõ ràng cũng cần phải được chứng minh. Và những gì tưởng như rõ ràng lại cực kì khó chứng minh, đôi khi còn co thể sai nữa. Dường như chỉ có một vài ngoại lệ nhỏ, các chi tiết có thể là khó khăn chủ yếu, tiến bộ có thể cực kì hạn chế. Toán học là lĩnh vực duy nhất trong nỗ lực của nhân loại nơi mà con người biết điều gì đó với sự chắc chắn tuyệt đối, nhưng công việc của nó gian khổ và dài lâu như thể phải vượt qua đầm lầy các định nghĩa và các công thức của nó thường chẳng chút nào thơ mộng trong cảm nhận của hầu hết tất cả mọi người. Không có gì minh họa cho sự đối lập rõ rệt giữa chính xác và mơ mộng tốt hơn là tác phẩm *Cơ sở* (Elements) của Euclid, khảo luận nổi tiếng về hình học và nó cần thiết cho câu chuyện mà ta đang hướng tới.

KIỆT TÁC *CƠ SỞ*

Tác phẩm *Cơ sở* của Euclid có nguồn gốc từ thời vua Ptolemy Soter (Ptolemy Đệ nhất) trị vì khoảng năm 300

TCN ở Alexandria. Ngay từ khi ra đời, nó đã gây một sự chấn động. *Cơ sở* hệ thống hóa nền toán học đã được phát triển từ thời của Thales và Pythagoras đến thời của Plato và Archimedes. Nó miêu tả lại một thiên niên kỉ của nền toán học ở Babylon và Ai Cập, trong khuôn khổ rõ rệt của trường phái Hi Lạp.

Đáng buồn thay, chúng ta hầu như không biết gì về Euclid (khoảng 325 - 265 TCN).[33] Chúng ta biết về ông còn ít hơn là về Pythagoras, và kể cả một chút ít thông tin mà chúng ta biết được về ông vẫn đang nằm trong vòng tranh cãi của các học giả. Euclid đã viết ít nhất mười cuốn sách, chỉ một nửa trong số đó còn sót lại. Một số dấu hiệu cũng chỉ ra rằng ông sống sau thời của Aristotle và trước thời của Archimedes. Ông là một trong những nhà toán học đầu tiên làm việc tại Đại thư viện Alexandria, và ở đó một nhóm các nhà toán học tài năng luôn tụ tập xung quanh ông. Có vô số truyền thuyết về ông, rất nhiều trong số đó có nguồn gốc có thể không rõ ràng đến từ các công trình của các nhà toán học khác. Ai đó từng kể rằng một lần Ptolemy hỏi Euclid về cách lĩnh hội hình học nhanh chóng nhất và nhận được câu trả lời, "Không có

---

[33] Xem I. Bulmer-Thomas, "Euclid", trong C. C. Gillespie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (New York Scribner, 1971) để có một tóm tắt hay về cuộc đời và tác phẩm của Euclid cùng với dẫn liệu. Xem thêm bài báo của J. J. O'Connor và E. F. Robertson's trên trang web của Đại học St. Andrews (www-history.mcs.standrews.ac.uk /Mathematicians/Euclid.html). Trang web này chứa tiểu sử của nhiều nhà toán học và một số bài báo về lịch sử toán học. Trang web này ngày càng chất lượng và mang tính học thuật hơn, và ngày nay đã trở thành một tư liệu rất hữu ích.

con đường dễ vương nào dẫn đến hình học." Một người khác lại kể rằng có một học trò sau khi đọc mệnh đề đầu tiên trong cuốn *Cơ sở*, đã hỏi Euclid nghiên cứu hình học có thể đem lại những lợi ích gì. Nhà toán học lập tức quay sang người nô lệ và trả lời một cách xem thường, "hỡi nô lệ, hãy đưa cho cậu bé này ba xu vì cậu ta phải thu lợi từ những gì mà cậu ấy đã học."

Cơ sở gồm mười ba cuốn. Các cuốn từ 1 đến 6 nói về hình học phẳng, từ 11 đến 13 về hình học của các khối rắn, và từ 7 đến 10 về lí thuyết số. Tất cả đều được bắt đầu từ các nguyên lí đầu tiên. Cuốn 1 bắt đầu với 23 định nghĩa, năm khái niệm chung, và năm tiên đề. Các định nghĩa nêu tên các đối tượng và khái niệm cơ bản mà Euclid đặt ra. Các *khái niệm chung* (common notion) là những quy tắc đã được mọi người chấp nhận về sự suy luận và về các mối quan hệ mà ông đã tường minh hóa. *Tiên đề* là những khẳng định về các đối tượng được giả sử là đúng mà không cần phải chứng minh. Ngày nay, chúng ta co thể xem các khái niệm chung cũng là tiên đề. Cac định nghĩa, các khái niệm chung, và các tiên đề là những điểm bắt đầu cho các khẳng định xa hơn được gọi là *mệnh đề*, được chứng minh bởi các quy tắc logic nghiêm ngặt. Một mệnh đề đặc biệt quan trọng được gọi là một *định lí*, một mệnh đề được dùng để chứng minh một định lí được gọi là *bổ đề*, và một mệnh đề được sinh ra một cách dễ dàng từ một dịnh lí được gọi là một *hệ quả*. *Một chứng minh* của một mệnh đề là lập luận có trình tự, và mang tính chính xác mà mỗi khẳng định của nó phải là một tiên đề hoặc một mệnh đề đã được chứng minh trước đó, hoặc là hệ quả của chúng thông qua các quy tắc mang

tính tiêu chuẩn của logic. Một chứng minh bắt đầu bằng các tiên đề và các mệnh đề đã biết, và kết thúc bằng kết luận rằng đó chính là điều phải chứng minh.

Chẳng hạn, đây là một số định nghĩa trong cuốn số 1.[34]

1. *Một điểm* là một đối tượng không thể chia nhỏ ra được.
2. *Một đường* là một đối tượng có chiều dài mà thiếu đi chiều rộng.
8. *Một góc phẳng* là độ nghiêng giữa một đường đối với một đường khác, cắt nhau nhưng không trùng nhau, và nằm trong cùng một mặt phẳng.
9. Và khi các đường tạo nên một góc là thẳng hàng, góc đó được gọi là góc bẹt.
10. Khi một đường thẳng đứng trên một đường thẳng khác tạo thành hai góc kề nhau và bằng nhau, hai góc đó được gọi là hai góc *vuông*, và hai đường thẳng đó được gọi là *vuông góc* với nhau...
23. Các đường thẳng *song song* là các đường thẳng nằm trên cùng một mặt phẳng kéo dài đến vô tận về cả hai hướng, nhưng không gặp nhau ở bất kì hướng nào.

Dưới đây là năm khái niệm chung.

1. Các đối tượng cùng bằng một đối tượng khác thì được gọi là bằng nhau.
2. Nếu các đối tượng bằng nhau cộng với các đối tượng bằng nhau khác thì các tổng thu được sẽ là bằng nhau

---

[34] Phỏng theo từ bản dịch vĩ đại của T. L. Heath *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (New York: Dover, 1956).

3. Nếu các đối tượng bằng nhau bị bớt đi các đối tượng bằng nhau khác thì các phần còn lại là bằng nhau.
4. Các đối tượng trùng lặp với một đối tượng khác thì chúng bằng nhau.
5. Tổng luôn lớn hơn từng phần tử của nó.

Và, sau đây là năm tiên đề.

1. Qua hai điểm bất kì, luôn vẽ được một đường thẳng.
2. Một đoạn thẳng có thể được tạo thành từ bất kì đường thẳng nào.
3. Luôn vẽ được một vòng tròn với tâm và bán kính bất kì.
4. Tất cả các góc vuông đều bằng nhau.
5. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng khác tạo ra các góc phía trong ở cùng một nửa mặt phẳng nhỏ hơn hai góc vuông, hai đường thẳng đó nếu kéo dài ra vô tận, sẽ gặp nhau ở bên mặt phẳng nơi mà các góc phía trong nhỏ hơn hai góc vuông.

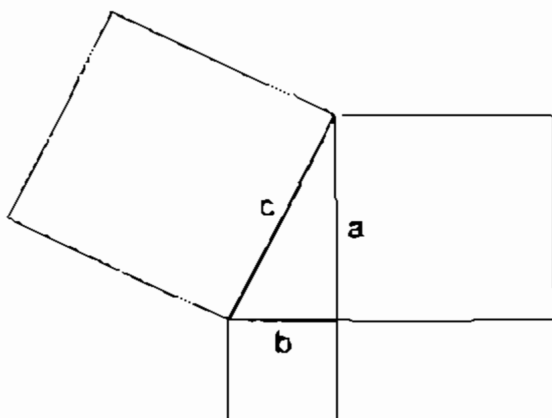
Sau đó, Euclid tiếp tục suy luận tất cả các chân lí phổ biến của hình học phẳng bằng cách sử dụng các định nghĩa, các khái niệm chung, tiên đề và các mệnh đề đã được thành lập trước đó. Ví dụ, mệnh đề 1 phát biểu rằng với bất kì đoạn thẳng nào, chúng ta đều có thể tạo ra một tam giác đều với một cạnh là đoạn thẳng đó. Mệnh đề 4 nói rằng nếu hai cạnh của một tam giác và góc giữa chúng bằng hai cạnh và góc xen giữa của một tam giác khác thì hai tam giác đó bằng nhau. Hầu hết sách trung học thường gọi là tính chất cạnh-góc-cạnh. Mệnh đề 5

cho chúng ta biết hai góc đáy của một tam giác cân thì bằng nhau (định nghĩa *cân* đòi hỏi hai cạnh bằng nhau, ta phải chứng minh hai góc tạo bởi hai cạnh đó với cạnh thứ ba bằng nhau). Mệnh đề 32 nói rằng tổng 3 góc của một tam giác bất kì bằng một góc bẹt (180 độ), và mệnh đề 37 đề xuất công thức tính diện tích tam giác. Mệnh đề 47 là định lí Pythagoras: tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh kề của một tam giác vuông bằng diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền của tam giác này, và mệnh đề 48 là một đảo đề của mệnh đề 47 (nếu diện tích của hình vuông tạo bởi cạnh dài nhất của một tam giác bằng tổng diện tích của hai hình vuông tạo bởi các cạnh còn lại, thì góc đối diện với cạnh dài nhất phải là một góc vuông)[15] Hai ngàn năm hình học được đúc kết chỉ trong một vài trang giấy!

Trước thời của Euclid, cũng đã xuất hiện các văn bản nhấn mạnh sự quan trọng của phương pháp suy luận.

---

[15] Định lí Pythagoras: Diện tích hình vuông chứa cạnh c phải bằng tổng diện tích hai hình vuông có chứa cạnh a và b. Hay tổng quát hơn, một tam giác có ba cạnh a, b và c, thì nó là tam giác vuông với góc vuông giữa a và b khi và chỉ khi $a^2 + b^2 = c^2$.



Nhưng Euclid đã biết sử dụng nó một cách đúng đắn. Cách lựa chọn các tiên đề, cách sắp xếp các mệnh đề, tầm bao quát tuyệt đối và thông minh của tác phẩm *Cơ sở* đã làm lu mờ các cuốn sách khác. Plato, Aristotle, và các nhà triết học Hi Lạp khác đều hết sức quan tâm đến toán học, và trong suốt hai thế kỉ kể từ thời của Thales và Pythagoras cho đến khi Đại thư viện Alexandra ra đời đã diễn ra nhiều cuộc tranh luận về hình học, trình tự suy luận, cũng như sự trao đổi học thuật về các nguyên tắc thích hợp đầu tiên. Euclid hệ thống lại một số lượng rất lớn các chứng minh và các thảo luận rời rạc. Kết quả khám phá của hơn 200 năm hình học và lí thuyết số Hi Lạp, và 1500 năm trước đó của toán học Babylon, đã được ông tái hiện mạnh mẽ từ các nguyên tắc đầu tiên cơ bản nhất. Bắt đầu với một số ít mệnh đề đơn giản, tiến hành từng bước chắc chắn, Euclid thu được từ kết quả này đến kết quả khác với sự thấu đáo sâu sắc. Những kết quả được chắt lọc qua nhiều thời đại một cách khó khăn lại trở nên có vẻ như là hiển nhiên.

Trong một nền văn hóa đề cao hình học và đang lúng túng trước các kết quả dị biệt, một nền văn hóa đã đề ra các nguyên tắc cơ bản về suy luận, sự xuất hiện của *Cơ sở* đã góp phần vào những năm đầu tiên mang tính sáng tạo đột phá của Alexandria. Các thiên tài toán học, mà sáng chói nhất có thể kể đến Archimedes (287-212 TCN) và Apollonius (262-190 TCN), đã tiến rất xa trong việc tìm ra các kết quả và lí thuyết toán học được xây dựng trên nền tảng của cuốn sách *Cơ sở*. Hai trăm năm tiếp theo, toán học và khoa học đã phát triển xa hơn nữa. Theodosius

(160-90 TCN) và Menelaus (khoảng 70-140 TCN) nghiên cứu hình học trên mặt cầu. Hipparchus (190-120 TCN) và Eratosthenes (276-194 TCN) đã nâng địa lí toán học và thiên văn học lên một tầm cao mới. Phần lớn các tác phẩm này đã bị thất lạc, hoặc đã đến với chúng ta dưới các hình thức gây khó khăn cho việc khẳng định được chính xác nội dung cụ thể mà các tác giả đã viết.

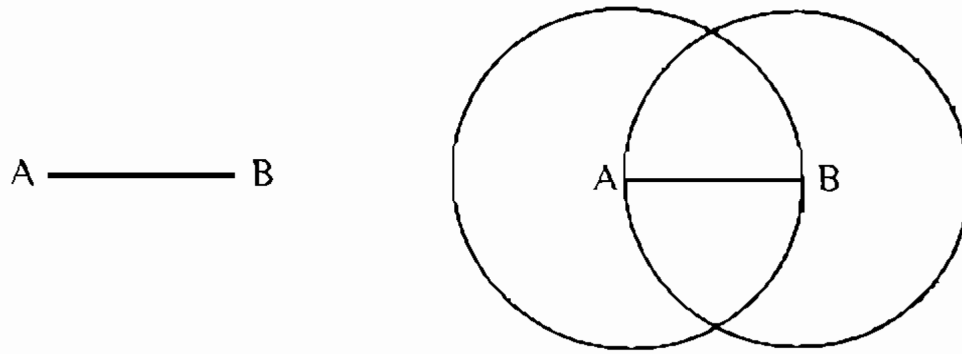
SỰ CHẶT CHẼ VÀ TÁC PHẨM *CƠ SỞ*

Bất kì tác phẩm nào có sự tự ý thức về tính chặt chẽ như cuốn *Cơ sở* cũng gợi lên câu hỏi về mức độ của sự nghiêm ngặt trong nội dung của nó. Trái với sự cứng nhắc của nhiều thế hệ giáo viên có thiện chí, Euclid sử dụng không chỉ các tiên đề và định nghĩa để lập luận. Ông còn ngầm sử dụng nhiều tính chất khác.

Ví dụ, hãy xem mệnh đề 1, nó nói rằng với bất kì một đoạn thẳng cho trước nào, ta cũng có thể xây dựng một tam giác đều có một cạnh là đoạn thẳng đó. Quá trình suy luận như sau: cho A và B là hai điểm ở hai đầu của đoạn thẳng, từ tiên đề 3 chúng ta có thể vẽ một vòng tròn có tâm tại điểm A và bán kính AB. Dùng tiên đề 3 một lần nữa, ta vẽ một vòng tròn tại điểm B với cùng bán kính.

Hai vòng tròn (xem Hình 23) này gặp nhau tại hai điểm. Chọn một. Gọi nó là C. Theo tiên đề 1, chúng ta có thể vẽ tiếp hai đoạn thẳng AC và BC (xem Hình 24). Tam giác có các cạnh AB, BC, AC phải là tam giác đều vì độ dài AB, BC, và AC bằng nhau (bởi vì chúng là các bán kính của các vòng tròn bằng nhau).

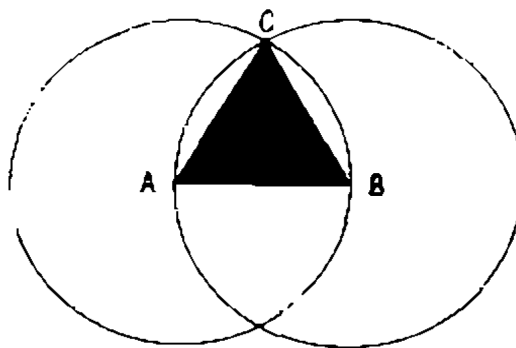
Thật tốt. Nhưng tiên đề hay tính chất nào nói rằng hai vòng tròn có tâm tại A và B phải giao nhau?



Hình 23. Hai vòng tròn có cùng bán kính.

Điều này không xuất phát từ các tiên đề hoặc định nghĩa, và là một khoảng trống rõ ràng được nhận ra ngay từ đầu và được đề cập đến trong rất nhiều bài chú giải cho tác phẩm *Cơ sở*. Nếu luật chơi là phải hoàn toàn rõ ràng về tất cả các giả định, và không có trường hợp nào ngoại lệ, điều gì đã làm cho Euclid mặc nhiên thừa nhận rằng hai đường kẻ hoặc hai hình tròn cắt nhau phải có điểm chung? Chúng ta cần phải có thêm một số nguyên tắc nữa đóng vai trò trung gian nói rằng nếu một đường thẳng hoặc một vòng tròn có chứa các điểm nằm ở phía bên kia một đường thẳng hoặc một vòng tròn, thì cả hai phải có ít nhất một điểm chung. Còn nhiều lỗ hổng khác nữa. Nhiều chứng minh khác ngoài chứng minh của mệnh đề đầu tiên để lại nhiều lỗ hổng không được mong đợi. Hơn thế nữa, có một vài tiên đề không rõ ràng. Phải chăng tiên đề 2 có nghĩa là chúng ta có thể kéo dài một

đoạn thẳng ra mãi mãi? Hay nó muốn nói rằng ta có thể cắt ngắn bất cứ đoạn thẳng nào? Và nếu nó mang ý nghĩa đầu tiên, ai dám bảo đảm rằng đường thẳng đó là duy nhất? Và ta nên xem xét các định nghĩa với tầm quan trọng như thế nào? Phải chăng chúng chỉ nhằm mục đích cung cấp hướng dẫn về một từ chưa được định nghĩa về mặt cơ bản (ngày nay, và có lẽ cả thời Euclid nữa, nghĩa là nhằm mục đích giải thích), hay chúng có nghĩa vụ phải hoàn toàn phân định các đối tượng được nêu tên? Nếu vế sau là đúng thì cụm từ "đường thẳng có chiều dài nhưng không có chiều rộng" có nghĩa là gì?



Hình 24. Xây dựng một hình tam giác đều.

Các nhà toán học và các học giả biết rằng có những lỗ hổng trong cuốn sách của Euclid, và đã có rất nhiều cuộc thảo luận qua các thời đại về các tiên đề thay thế hoặc các tiên đề bổ sung khả dĩ. Nhưng điều đó không ảnh hưởng đến sự tôn kính dành cho người thầy vĩ đại của bao thế hệ, đến sự say mê đi vào lòng người nhờ hệ thống đồ sộ, khả năng tiếp cận và tính hữu dụng của cuốn sách *Cơ sở* - nó không ngừng được ca ngợi, tung hô như một tác phẩm tinh tế nhất trong tư tưởng nhân loại. Tuy nhiên,

đối với một học sinh thận trọng, cuốn *Cơ sở* có thể có vẻ ít hợp lí hơn là khó nắm bắt. Sự cố chấp của quan điểm khẳng định rằng cuốn *Cơ sở* nay tuyệt nhiên không có sai sót, và là đỉnh cao của tư duy chặt chẽ đã khiến một số học sinh rời xa toán học. Người ta lo ngại về mức độ sợ hãi mang tính toán học mà sự mâu thuẫn này gây ra: mâu thuẫn giữa khẳng định rằng những gì Euclid viết ra là đúng một cách hoàn hảo và trực giác của một vài sinh viên - mặc dù khó diễn đạt - cho rằng có một vài điều trong số đó không hoàn toàn đúng. Nếu bạn chỉ là một kẻ nổi loạn bình thường, thì bạn sẽ đổ lỗi cho bản thân một cách dễ dàng và kết luận rằng toán học không nằm trong tầm với của mình.

Một điều nữa cần lưu ý khi nói đến các kết quả toán học, đó là mặc dù với tất cả chúng ta, chúng là vĩnh cửu và nằm ngoài các nền văn minh nhân loại cụ thể, nhưng trong thực tế, chúng được truyền đạt và hiểu trong các bối cảnh xã hội và văn hóa nhất định. Ví dụ, một vài người lập luận rằng người Hi Lạp đã sáng tạo ra chứng minh nhằm làm rõ nghĩa các kết quả toán học của người Babylon và Ai Cập, mà không có sự thâm nhập vào bối cảnh mà trong đó các kết quả đó được sử dụng và khám phá.[36] Để sử dụng các kết quả đó - mặc dù điều này có vẻ mâu thuẫn - người Hi Lạp đã phải bằng nỗ lực của riêng họ, tái phân loại chúng, tính toán và tái tạo các kết quả đó trong hệ thống của các thuật ngữ riêng của họ. Việc làm này đương nhiên là có vẻ hợp lí. Ngay cả trong cùng một

[36] Xem, J. Gray, *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic* (Oxford, New York: Oxford University Press, 1979).

nền văn minh, mỗi thế hệ các nhà toán học đều giải thích lại và tái cấu trúc các nền toán học của các thế hệ trước đó. Tìm hiểu toán học tức là tái tạo toán học.

Nhưng sự mập mờ còn len lỏi tới những cấp độ sâu hơn thế. Alexandria của 2.300 năm trước là một nền văn hóa rất xa lạ với chúng ta. Mặc dù toán học và công nghệ trong thế kỉ đầu tiên rất tiến bộ, nhưng một phần lớn của nền tri thức này đã bị thất truyền, và chúng ta hầu như không biết gì về bối cảnh mà trong đó tác phẩm *Cơ sở* được tạo ra. Trong một cuốn sách gây ra nhiều tranh luận mà một bản dịch tuyệt vời của nó từ tiếng Ý sang tiếng Anh vừa mới ra đời, Lucio Russo lập luận rằng khoa học - theo nghĩa hiện đại của từ này - đã phát triển rực rỡ ở Alexandria năm 300-150 TCN để rồi sau đó đã thất truyền.[37] Theo Russo, phần dành cho hình học của cuốn *Cơ sở* là một lí thuyết của sự tính toán. Theo lập luận của ông, người Hi Lạp tính toán bằng cách, đầu tiên biến đổi đối tượng tính toán thành đối tượng hình học, sau đó dựng các đối tượng hình học thích hợp bằng thước kẻ và compa, và cuối cùng là đo đạc. Giống như bàn tính của vài thế kỉ sau đó, thước kẻ và la bàn thời bấy giờ cũng là các phương tiện tính toán, mà cuốn *Cơ sở* đã chỉ cho ta cách sử dụng cũng như mục đích sử dụng chúng.

Lập luận của Russo có phần hơi ngược đời, và chắc chắn sẽ gây nên một làn sóng chỉ trích gay gắt. Nhưng sự tồn tại hiển nhiên của các lỗ hổng trong chứng minh của

---

[37] L. Russo, *The Forgotten Revolution: How Science was born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn*, trans. Silvio Levy (New York: Springer, 2003).

mệnh đề 1 đã cùng có giả thuyết của Russo cho rằng Euclid đã tạo ra một mô hình toán học cho những gì mà một người có thể vẽ ra bằng thước kẻ và compa trên một mảnh giấy da, chứ không phải nhằm vào một sự rõ ràng tuyệt đối. Tiên đề đầu tiên cho rằng chúng ta có thể vẽ một đường thẳng giữa hai điểm bất kì, và tiên đề thứ hai nói ta có thể kéo dài một đường thẳng đến vô tận. Tóm lại, tất cả những tiên đề này chỉ diễn giải việc ta đang có một cái thước kẻ, mà ta có thể bỏ qua những rắc rối phát sinh do độ dài quá ngắn của cái thước đó. Tiên đề thứ ba khẳng định ta có thể dựng một vòng tròn với tâm và kích thước bất kì - ngụ ý nói rằng ta đang có trong tay một "compa lí tưởng" mà ta có thể giả định lớn nhỏ tùy thích. Ta có thể tưởng tượng Euclid đã muốn nói rằng chúng ta có thể khám phá tất cả khả năng mà ta có thể làm được với một cái thước kẻ và compa mà không cần quan tâm đến giới hạn vật lí của chúng. Có thể ông không bao giờ thừa nhận rằng các đường thẳng và vòng tròn vẽ bằng thước kẻ và compa cắt nhau tại một điểm nếu chúng giao nhau. Điều này dường như là hoàn toàn hiển nhiên nếu trong tâm trí ông đã xuất hiện các đối tượng vật lí lí tưởng.

Sự hợp lí trong lập luận của Russo có lẽ đã dạy cho chúng ta sự khiêm nhường. Chúng ta không biết mục đích của cuốn sách hoặc đối tượng độc giả mà cuốn sách hướng đến. Nhưng quan niệm của nhiều người cho rằng đó là một cuốn sách giáo khoa cho học sinh có thể không chính xác. Chỉ cần đọc sơ qua tác phẩm *Cơ sở*, ta cũng nhận ra rằng nó viết cho người lớn chứ không phải cho trẻ em. Giả thuyết cho rằng đó là một cuốn sách dành cho

các học sinh của Thư viện Alexandria cũng chỉ đơn giản là một giả thuyết không hơn.

SỰ TRƯỜNG TỒN CỦA CUỐN *CƠ SỞ*

Bất chấp những thiếu sót của cuốn *Cơ sở*, bất kì ai đọc nó đều nảy sinh niềm ngưỡng mộ chân thành trước sự khéo léo trong cách truyền đạt các chứng minh. Sự phát triển không ngừng - đi từ các khái niệm đơn giản nhất đến các mệnh đề tinh tế, sâu sắc, và đẹp đẽ - đã minh chứng cho hiệu quả của khả năng suy luận của con người. Nhìn lại từ vị trí thuận lợi của ngày hôm nay, ta dễ dàng thừa nhận sự trường tồn của cuốn *Cơ sở*, cũng như gia cố những sự hợp lí hóa nhằm giải thích sự tồn tại của cuốn sách. Như ta thường nói, bất cứ điều gì tốt cũng sống mãi. Chúng ta tự nhủ rằng những cuốn sách cổ thực sự hay chính là những cuốn còn lại đến ngày nay. Theo như câu nói cũ mèm này thì một cuốn sách càng giá trị bao nhiêu nó càng có nhiều khả năng được sao đi chép lại bấy nhiêu. Cũng chính vì thế mà nó cũng có nhiều khả năng đã được dịch sang tiếng Arập và lưu truyền theo cách này, ngay cả khi bản thảo tiếng Hi Lạp đã bị mất. Một niềm hi vọng tốt đẹp như vậy làm yên lòng mọi người, tuy nhiên quá nhiều quyển sách vĩ đại đã bị thất truyền. Mặc dù Euclid là nhà hình học nổi tiếng nhất của thời cổ đại, một nửa trong số các tác phẩm của ông đã bị thất lạc.[38]

---

[38] Các cuốn *Data*, *On Division*, *Optics* và *Phaenomena* vẫn còn nhưng *Surface Loci*, *Porisms*, *Conics*, *Book of Fallacies* và *Elements of Musics* thì đã thất lạc.

Sự thừa nhận một cách vô tư rằng bất cứ cuốn sách nào hay như cuốn *Cơ sở* đều trường tồn, sẽ làm giảm bớt tính lì kì trong sự lưu truyền của tác phẩm này. Tác phẩm *Cơ sở* vẫn được lưu truyền ngay cả khi nguồn năng lượng sáng tạo và chất lượng của nền học thuật tại Alexandira dần giảm sút (thực tế này tồn tại khá lâu trước khi Julius Caesar đốt cảng Alexandria năm 47 TCN). Cuốn sách đã tồn tại qua giai đoạn cuối cùng của Alexandria với vai trò là trung tâm học thuật, và sau đó là một cuộc hủy diệt đại thư viện đánh dấu bằng vụ thảm sát tàn bạo nhà nữ toán học theo trường phái Plato, Hypatia (370-415) tháng 3 năm 415. Bị đe dọa bởi uy tín và quyền năng của các bài giảng của cô, một đám đông Thiên Chúa giáo điên cuồng đã lột truồng và tước da cô cho đến chết hòng xóa bỏ uy quyền, vẻ đẹp, và tri thức của cô. Họ đã không thành công. Ấn bản cuốn *Cơ sở* mà cô đã soạn cùng cha mình, Theon (335 - khoảng 405) đã trở thành ấn bản chuẩn mực sau cái chết của cô. Đó là phần chủ yếu của những gì mà Caliph al-Mansur (712-775, trị vì 754-774) thu được từ Hoàng đế Byzantine, và sau đó một dịch giả lớn người Arập, al-Hajjaj (khoảng 786-833) đã dịch nó những hai lần.[31] Các học giả Arập, cũng giống như người Hi Lạp, đã bị mê hoặc bởi cuốn *Cơ sở*, do đó nó được dịch, sao chép, biên tập lại hàng trăm lần tại các trung tâm học thuật lớn của Arập. Vô số những chú thích, tóm lược, giải trình, và các bản dịch mới đã ra đời.

---

[31] Cả hai bản dịch đã được sửa lại, đồng thời có các bản dịch khác xuất hiện, nhưng chỉ có bản dịch thứ hai - được biên tập và sửa lại phần lớn bởi al-Nayrizi - là vẫn còn tồn tại dưới dạng bản thảo tại Leiden, Hà Lan.

Hàng trăm năm sau, cuốn *Cơ sở* và một số công trình của Aristotle là những công trình Hi Lạp cổ đại đầu tiên được dịch lại từ tiếng Arập sang tiếng Latin. Gherard xứ Cremona (1114-1187) dường như đã thực hiện bản dịch đầu tiên như thế. Johannes Campanus, một giáo sĩ của Giáo hoàng Urban IV (1261-1281) sau đó đã dịch lại nó. Sự tràn ngập của những bản dịch các cuốn sách cổ điển do Gherard và những người khác khởi xướng trùng hợp với sự xuất hiện gần như tự phát của các trường đại học lâu đời nhất của chúng ta tại Bologna, Paris, Oxford, Cambridge, Salamanca, và các nơi khác ở châu Âu. Thực chất Euclid là trung tâm của các trường đại học của chúng ta.[40]

Cuốn *Cơ sở* là tác phẩm khoa học được phát hành đầu tiên sau khi ngành in ấn ra đời vào giữa thế kỉ 15.[41] Các ấn bản khác nhau của nó là những cuốn sách bán chạy nhất trong thời Phục hưng châu Âu. Nó được thừa nhận rộng rãi là cuốn sách được đọc nhiều thứ hai trong lịch sử loài người.[42] Tuy nhiên, nếu bạn biết rằng nó đã được dịch sang tiếng Trung Quốc năm 1607 và đã thâm

---

[40] Xem thêm tại C. H. Haskins, *The Rise of Universities* (reprinted Ithaca, NY: Cornell University Press, 1957).

[41] Công nghệ in ấn thường được cho là được phát minh bởi Johannes Gutenberg vào năm 1455. Câu chuyện thực tế còn phức tạp hơn nhiều. Xem thêm Adrian Johns, *The Nature of the Book: Print and Knowledge in the Making* (Chicago: University of Chicago Press, 1998).

[42] Xem trích đoạn trong van Der Waerden, trích dẫn bởi bài báo của J. J. O'Connor và E. F. Robertson trên website (www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euclid.html).

nhập vào các tiểu lục địa Ấn Độ vào thế kỉ mười, thì có thể nó chính là cuốn sách được đọc nhiều nhất qua mọi thời đại. Thật ấn tượng khi các đối thủ cạnh tranh duy nhất của nó là Kinh Thánh và Kinh Coran.

Sự phổ biến của cuốn *Cơ sở* qua thời gian cho thấy rằng cuốn sách này hẳn phải đáp ứng một nhu cầu thiết yếu nào đó của con người. Nhiều người đã ca ngợi những kết quả bổ ích mà việc tìm kiếm tác phẩm này đem lại cho quá trình phát triển khả năng lí luận của con người. Đó là cuốn sách gối đầu giường của Abraham Lincoln trong những ngày ông họp Quốc hội.[43] Thomas Jefferson khuyên một người đàn ông trẻ tuổi và có tinh thần học hỏi rằng việc nghiên cứu các kết quả trong cuốn *Cơ sở* sẽ rất hữu ích cho việc đọc những cuốn sách sau này.[44] Thậm chí nhiều người khác đã lí luận rằng cuốn sách của Euclid đặc biệt hữu ích cho các thiếu nữ. Ngay từ năm 1838, Mount Holyoke College, trường đại học dành cho phụ nữ lâu đời nhất của nước Mĩ, đã yêu cầu sinh viên phải có và nghiền ngẫm sách Euclid do Simson hoặc Playfair biên soạn.[45]

---

[43] Abraham Lincoln (1809-1865): Tổng thống thứ 16 của nước Mĩ, người đã đưa nước Mĩ thoát khỏi cuộc nội chiến Bắc-Nam (ND).

[44] Thomas Jefferson (1743-1826): Tổng thống thứ 3 của nước Mĩ, tác giả chính của bản Tuyên ngôn Độc lập (ND).

[45] Cả Simson và Playfair đều là người Scotland. Robert Simson (1687-1768) trở thành Giáo sư trường Đại học Glasgow năm 1710, đã soạn lại cuốn *Cơ sở* bao gồm Chương 1-6, 11 và 12, được tái bản 70 lần với bản đầu tiên bằng tiếng Latin và các bản sau đó bằng tiếng Anh. John Playfair (1748-1819), Giáo sư toán và sau này là Giáo sư triết học tự nhiên tại Đại học Edinburgh, xuất bản phiên

Mặc dù tác phẩm *Cơ sở* được lưu truyền và trở nên rất phổ biến, nhưng chúng ta vẫn chẳng có một ý tưởng gì về bản gốc cả. Đây là tình trạng chung cho bất kì cuốn sách nào xuất bản thời đó. Trước khi người ta phát minh công nghệ in ấn, các cuốn sách được chép tay từ người này sang người khác, do đó sai sót cũng tăng lên theo từng bản. Đặc biệt là đối với một cuốn sách được sao chép quá rộng rãi như cuốn *Cơ sở*. Sự phức tạp trong việc lưu truyền từ thời đó cho đến ngay nay của cuốn *Cơ sở* vượt xa bất kì cuốn sách cổ nào khác.[16] Hàng ngàn học giả và giáo viên đã nghiên cứu, chú thích cuốn sách một cách cẩn thận, đồng thời sao chép lại theo những cách mà họ cho là dễ hiểu hơn. Có vô số phiên bản, chú thích, và bản dịch khác nhau. Bản dịch tiếng Arập cho bản viết bằng tiếng Hi Lạp đã bị thất lạc cũng giống như chính bản viết tay tiếng Hi Lạp đó.

Trong một thời gian dài, bản chuẩn tiếng Arập thường được cho là lâu đời hơn các bản tiếng Hi Lạp còn tồn tại. Tuy nhiên, năm 1808, François Peyrard lập luận rằng một bản chép tay tiếng Hi Lạp của tác phẩm *Cơ sở* tại Thư viện Vatican mà Napoleon đã giành được và đem về Paris còn cổ hơn cả bản tiếng Arập. Bằng chứng quan trọng là một nhận xét mà Theon đã đưa ra khi chú giải tác

---

bản bằng tiếng Anh bán rất chạy của cuốn *Cơ sở* trong đó ông sử dụng các ký hiệu đại số để đơn giản hóa các lí luận.

[16] Xem thêm J. Murdoch "Euclid: Transmission of the Elements," trong *Dictionary of Scientific Biography*, ed. C. C. Gillespie (New York: Scribner, 1971). Bài tham luận này bao gồm một biểu đồ mô tả các phiên bản khác nhau của cuốn *Cơ sở* trong thời Trung cổ. Bạn cũng có thể tham khảo thêm ghi chú trong bản dịch tiếng Anh của Heath.

phẩm *Almagest* của Ptolemy, theo đó, ông đã đưa thêm một số dữ liệu vào mệnh đề cuối cùng trong cuốn 6 của cuốn *Cơ sở*. Bản thảo của Vatican không có phụ lục này. Peyrard đã tiến hành chỉnh sửa bản tiếng Hi Lạp mà tác giả của nó sau đó đã được phân định (được biên soạn bởi Simon Grynaeus (Basel, 1533)).

Năm 1883-1884, học giả Đan Mạch J. L. Heiberg phát hành một bản khôi phục rất uyên bác, khởi nguồn từ bản gốc tiếng Hi Lạp dựa trên bản chép tay của Vatican và các bản thảo khác. Không ai thắc mắc rằng liệu công trình của Heiberg có sát với bản gốc hơn bản của Theon và Hypatia hay không, và đó là bản mà hầu hết các học giả ngày nay sử dụng. Nó là cơ sở cho bản dịch tiếng Anh chuẩn mực mà Heath biên soạn năm 1908. Ngoại trừ sự uyên bác vĩ đại của Heiberg, ta không biết bản thảo của Vatican lâu đời hơn chừng nào so với bản *Cơ sở* của Theon và Hypatia. Bản của Theon và Hypatia xuất hiện 700 năm sau bộ sách *Cơ sở* của Euclid. Bản của Vatican có thể đã xuất hiện vài trăm năm trước phụ bản của cha con Theon, và do đó cũng có thể đã hấp thu biến cải của hàng thế kỉ. Chúng ta ai cũng hiểu rằng, bản khôi phục của Heiberg có thể rất khác bản gốc của Euclid.

Yếu tố gây cảm hứng nhiều nhất của tác phẩm *Cơ sở* không phải là sự thiêng liêng mà là tính bất ngờ của nó. Câu chữ của nó không phải là vấn đề, - thậm chí còn có vẻ ngược lại - không phải là lí do thực sự khiến cuốn sách trường tồn. Điều quan trọng chính là sự kì lạ mà hình học đem lại, sự sẵn lòng đặt câu hỏi nghi vấn về kiến thức đã được truyền thụ, và cách mà nền tri thức nhân loại được

xây dựng dựa trên công trình của nhiều người. Hầu như mỗi từ và mỗi dòng của tác phẩm *Cơ sở* đã nhận được sự quan tâm rộng rãi từ hàng nghìn nhà bình luận. Người ta đề xuất các cách diễn đạt thay thế hay đưa ra các chứng minh khác nhau. Các định lí được biết đến ở nhiều nơi khác nhau trên thế giới trong các tên gọi khác nhau. Mệnh đề 5 được biết đến ở Anh như *pons arsinorum*-cầu con lừa. Mệnh đề 47, ngày nay gọi là định lí Pythagoras, một thời được gọi là *định lí đám cưới* hoặc *định lí cô dâu*.[47,48] Chú thích đầy đủ nhất còn lại từ thời cổ đại là của Proclus ở Rome (410-485). Ông có thể đã có lần lượt trong tay không ít hơn bốn bản chú thích quan trọng, nhưng tất cả đều đã thất lạc ngoại trừ một số đoạn nhỏ - điều này càng nhấn mạnh sự mong manh của các công trình cá nhân.[49] Bộ sách *Cơ sở* là một chủ đề thường trực và chủ đạo trong sự mưu cầu tiến bộ của nhân loại, cho sự phụ thuộc lẫn nhau của con người, và cho sự không chắc chắn của thành tựu cá nhân. Để hướng đến giả thuyết Poincaré, những gì quan trọng nhất trong bộ sách *Cơ sở* với chúng ta là tiên đề thứ 5 và cách mà nó đem lại cho chúng ta sự hiểu biết hiện thời về không gian.

---

[47] Xem ""Excursus II Popular Names for Euclidean Propositions", trong ấn bản thứ hai bản dịch của T. L. Heath.

[48] Định lí Pythagoras được gọi là "định lí đám cưới" hoặc "định lí cô dâu", hay "định lí ghế cô dâu" bởi hình vẽ minh họa định lí này tạo thành một hình giống như tấm khăn phủ ghế của cô dâu trong đám cưới rất phổ biến ở châu Âu ngày xưa và ngày nay vẫn còn được một số nơi sử dụng (ND).

[49] Đó là những chú thích của Geminus xứ Rhodes (10-60), Heron (khoảng 10-75) và Pappus (khoảng 290-350) xứ Alexandria, và Porphyry Malchus (233-309).

6

Trường phái Phi-Euclid

Việc lĩnh hội được ý nghĩa của không gian uốn cong là then chốt trong chứng minh giả thuyết Poincaré của Perelman. Để hiểu được tính cong thì lại đòi hỏi phải hiểu được một cách tuyệt đối rõ ràng ý nghĩa của tính thẳng và tính phẳng. Để đạt được mục đích này, không những ta cần bộ sách *Cơ sở* của Euclid mà còn cần đến những kiến giải phức tạp hơn về tác phẩm này được phát triển trong suốt hai thiên niên kỉ qua. Nói một cách chính xác hơn, các khái niệm có vẻ như đơn giản của tính thẳng và tính phẳng đòi hỏi ta phải làm sáng tỏ những ẩn ý khó hiểu trong tiên đề thứ 5 thuộc chương đầu tiên trong kiệt tác của Euclid.

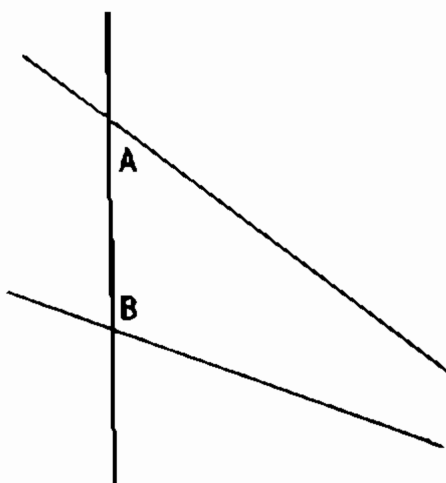
TIÊN ĐỀ THỨ 5

Ngay từ những câu chữ đầu tiên, tiên đề thứ 5 của Euclid đã làm ta bối rối:

> Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng sao cho tổng các góc trong ở cùng một phía nhỏ hơn hai góc vuông, và

> nếu hai đường thẳng đó là vô hạn thì chúng sẽ gặp nhau ở phía các góc trong có tổng nhỏ hơn hai góc vuông đó.

Năm tiên đề đầu tiên đã được chép lại trong Chương 4. Bốn tiên đề đầu tiên, mỗi tiên đề chỉ cần ít hơn một dòng để phát biểu. Nhưng tiên đề thứ 5 thì không như vậy. Euclid có lẽ đã suy nghĩ rất lâu và kĩ lưỡng trước khi thêm nó vào trong danh mục của mình, và chắc là ông cũng không thực sự hài lòng. Ông hoãn sử dụng nó càng lâu càng tốt (cho đến mệnh đề 29), đương nhiên là với một lí do chính đáng. Từ khi ra đời, nó đã bị công kích bởi vì quá phức tạp. Các tiên đề khác mạch lạc, hiển nhiên và có thể phát biểu một cách dễ dàng. Tiên đề thứ 5 thì ngược lại. Khó chịu. Bạn cần phải đọc đi đọc lại vài lần thì mới có thể hiểu nó muốn nói gì.



Hình 25. Bởi vì tổng các góc A, B nhỏ hơn 180 độ, hai đường thẳng cắt đường thẳng đứng sẽ phải gặp nhau tại một điểm ở phía bên phải so với đường thẳng đứng.

Để diễn đạt nó lại bằng những thuật ngữ quen thuộc, cần nhớ rằng một vòng quay hoàn chỉnh, theo quy ước, gồm 360 độ. Một phần tư vòng quay, hay một góc vuông là 90 độ, và hai góc vuông tạo ra một nửa vòng quay 180 độ. Tiên đề thứ 5 nói rằng nếu ta cho trước một đường thẳng cố định - mà ta có thể giả định là nó thẳng đứng - sau đó đưa ra hai đường thẳng khác cắt đường thẳng đứng kia sao cho tổng các góc trong (góc A và góc B trong Hình 25) cùng ở bên phải nhỏ hơn 180 độ, thì hai đường thẳng này sẽ phải cắt nhau tại một điểm ở phía bên phải.

"Đây không phải là tiên đề, mà là một định lí", Proclus đã phàn nàn như vậy và ông tìm cách chứng minh nó. Thất bại, ông thuật lại những nỗ lực đi tìm một lời giải đáp của nhà địa lí vĩ đại Ptolemy. Ptolemy đã viết một cuốn sách thử chứng minh tiên đề thứ 5 nhưng cuốn sách giờ đã thất lạc. Như Proclus đã chỉ ra, và cũng như Euclid chắc chắn đã biết, tiên đề thứ 5 tương đương với một phát biểu mà ta thường gọi là "tiên đề song song"[50]:

> Cho trước bất kì một đường thẳng l và một điểm P nào không nằm trên nó, đều tồn tại duy nhất một đường song song với l và đi qua P.

---

[50] Nói tiên đề thứ 5 tương đương với tiên đề Playfair có nghĩa là nói ta có thể chứng minh tiên đề Playfair nếu như ta chấp nhận năm tiên đề của Euclid, và ngược lại nếu như ta chấp nhận bốn tiên đề Euclid đầu tiên và tiên đề Playfair, ta có thể chứng minh tiên đề Euclid thứ 5 như chứng minh một mệnh đề.

Tiên đề này thường được gọi là tiên đề Playfair, vì ông chọn một biến thể của nó làm đại diện cho tiên đề thứ 5 trong phiên bản Euclid của ông.

Euclid đã hưởng lợi từ một cuộc tranh luận quan trọng của những người Hi Lạp về sự tồn tại của những đường song song. Phần lớn nội dung của cuộc tranh luận này đã bị thất lạc, nhưng ta còn biết về nó do Aristotle đã từng than phiền về vòng luẩn quẩn của các tranh luận liên quan đến các đường song song. Ông đã chỉ ra rằng nhiều luận cứ chứng minh sự tồn tại của các đường song song sử dụng các dữ kiện thực ra là tương đương với sự tồn tại của các đường song song, và do đó đã mặc nhiên thừa nhận những gì họ đang cố gắng chứng minh. Theo lời của ông, "Nếu A bắt nguồn từ B và B bắt nguồn từ C nhưng C lại bắt nguồn từ A, thì ta không thể nói ta đã chứng minh A bởi vì C là đúng."

Tuy nhiên, ta phải ngưỡng mộ lòng can đảm của Euclid khi nêu ra tiên đề thứ 5. Phần lớn mọi người có lẽ sẽ tìm cách loại bỏ nó. Nhưng Euclid thì không, ông quyết tâm tiếp tục với nó, và để lại cho chúng ta một kiệt tác.

Người Arập cũng bị ám ảnh bởi tiên đề thứ 5, và cố gắng suy luận nó từ các tiên đề kia, hoặc thay thế bằng một điều gì khác. Tất cả đều không có kết quả. Dĩ nhiên, họ đã đưa ra những phương pháp toán học mới giúp đơn giản hóa tính toán và đã tách biệt đại số độc lập với hình học.

Tuy nhiên, các câu hỏi về tiên đề thứ 5 vẫn còn là bí ẩn. Liệu ta có thể suy luận nó từ một trong các tiên đề kia

không? Hoặc phải chăng có thể có một phát biểu nào khác, hiển nhiên hơn, có thể được xem như là một tiên đề? Nền khoa học mà chúng ta được biết đến hiện nay đã xuất hiện vào thế kỉ 17, và sự phát triển của nó song hành với một sự bùng nổ của những khám phá toán học. Trong bầu không khí nóng bỏng đó, tiên đề thứ 5 đã trở thành nỗi ám ảnh của nhiều người. John Wallis, bậc tiền bối của Newton, khảo sát các tài liệu liên quan đến nó trong cuốn sách *Tiên đề thứ năm* (De postulato quinto) của ông. Từ năm 1607 đến 1880, hơn một nghìn cuốn sách và luận văn đã được xuất bản dành riêng cho tiên đề thứ 5. Rất nhiều người đã nỗ lực đi tìm lời giải đáp cho nó, nhiều chứng minh khác nhau được công bố, nhưng chưa có ai đạt được sự kĩ lưỡng vẹn toàn.

Có nhiều nỗ lực chứng minh nó vô cùng tuyệt diệu. Nằm trong số những chứng minh ngoạn mục nhất, phải kể đến chứng minh của Gerolama Saccheri (1667-1733), một linh mục dòng Tên và là Giáo sư Đại học Pavia. Ông đã xem xét một số tiên đề tương đương với tiên đề thứ 5, và giả sử tất cả là sai. Chẳng hạn, ông đã cẩn thận chứng minh rằng tiên đề thứ 5 tương đương với mệnh đề cho rằng tổng các góc của một tam giác bằng tổng hai góc vuông (nghĩa là 180 độ), và ông đặt ra hai trường hợp khác trong đó tổng các góc lớn hơn hoặc nhỏ hơn hai góc vuông với hi vọng tìm ra sự mâu thuẫn. Ông thậm chí còn tự thuyết phục bản thân rằng mình đã phát hiện ra một mâu thuẫn như vậy.[51]

---

[51] G. Saccheri, *Euclid ab omni naevo vindicatus* (n.p.: 1733).

Với phong trào Khai sáng và sự phát triển mạnh mẽ của khoa học, các trường đại học mới được thành lập. Một trong những trường lớn nhất thời đó, Đại học Göttingen, được thành lập năm 1737 bởi vua George II của nước Anh và cũng là tuyển hầu của vùng Hanover.[52,53] Ra đời trên tinh thần của trào lưu Khai sáng, đó là một trong những học viện đầu tiên đặt khoa học ở vị trí bình đẳng với thần học. Một trong những giáo sư tại Göttingen, nhà toán học Abraham Kästner (1719-1800), người quan tâm đến lịch sử và cơ sở toán học, đã viết lời nói đầu trong một bộ sách bốn tập được nhiều người đọc - *Mathematische Anfangsgründe* - của ông như sau:

> "Khó khăn phát sinh trong lí thuyết của những đường thẳng song song đã làm tôi bận tâm trong nhiều năm. Tôi đã từng nghĩ, nó đã được tháo gỡ hoàn toàn nhờ tác phẩm *Elements matheseos* của Hausen [1734]. Nhưng vị cựu giáo sĩ giáo đoàn Pháp ở Leipzig, ông Coste, đã phá tan sự tự mãn của tôi trong một chuyến đi dạo mà ông dành cho tôi khi nói rằng tác phẩm kể trên của Hausen có sai sót trong một lập luận. Tôi sau đó cũng đã sớm tự tìm ra sai sót đó, và bắt đầu thúc giục chính mình hoặc là xóa bỏ trở ngại đó hoặc là tìm cho ra được người đã vượt qua được nó. Nhưng tất cả các cố gắng đều thất bại, cho dù

---

52 George II cũng thành lập Đại học Princeton. Đi vào hoạt động năm 1746, lúc đó được biết đến dưới tên gọi Đại học New Jersey (New Jersey College), là trường duy nhất trong các nước thuộc địa của Anh mở cửa cho người theo bất kì tôn giáo nào.

53 Tuyển hầu (Elector hoặc Prince-Elector, tiếng Đức là Kurfürst): là người trong ban tuyển chọn hoàng đế cho Đế quốc La Mã thần thánh. Quyền lực chỉ đứng sau vua hoặc hoàng đế (ND).

tôi đã sớm lập ra một thư viện nhỏ chứa các công trình cá nhân bàn về các nguyên lí đầu tiên của hình học đặc biệt gần với chủ đề này."[54]

Kästner sử dụng một tiên đề tương đương của Walis thay cho tiên đề thứ 5.[55] Một sinh viên của Kästner, G. S. Klügel, viết luận án năm 1763 nghiên cứu khoảng 30 chứng minh cho tiên đề thứ 5 và chỉ ra rằng tất cả đều có sai sót. Ông kết luận: "Để chắc chắn, có lẽ hai đường thẳng không cắt nhau luôn tách khỏi nhau. Ta biết điều này là vô lí, không nhờ vào sự suy luận mang tính chặt chẽ hay các khái niệm rõ ràng về đường thẳng và đường cong, mà bằng kinh nghiệm và đánh giá của mắt."[56]

Luận án của Klügel gây ra sự chú ý đến chủ đề này cho một người bạn đầy tài năng của Kästner là Johann Heinrich Lambert (1728-77). Lambert sinh ra trong một gia đình lớn, nhu cầu thiết yếu cho cuộc sống bắt buộc ông phải theo nghề may của cha. Nhưng bên cạnh đó ông vẫn tiếp tục theo đuổi nghiệp học, và vẫn có thời gian dành cho nghiên cứu nhờ việc làm gia sư cho một

---

[54] Nguyên văn trong lời mở đầu của tác phẩm của A. Kastner, *Mathematische Anfangsgrunde* (n.p.: 1758). Đoạn này được trích ra từ tác phẩm W. B. Ewald, *From Kant* to *Hilbert: A Source Book* in *the Foundations of Mathematics*, vol. 1 (New York, Oxford. Oxford University Press, 1996)

[55] Tiên đề Wallis nói rằng tồn tại các dạng hình học giống nhau có kích thước bất kì. Các dạng hình học giống nhau là các đa giác có cùng số cạnh và có tính chất các góc giữa các cạnh tương ứng và tỉ lệ chiều dài của các cạnh tương ứng là bằng nhau

[56] G. S. Klugel, *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (n.p.: 1763), 16.

gia đình quý tộc người Thuỵ Sĩ. Lambert lập dị như chính sự thông tuệ của ông. Ăn mặc khác người, ông quả quyết rằng cách tốt nhất để nói chuyện với người khác không phải bằng cách đứng mặt đối mặt mà phải đứng vuông góc với nhau. Nhà toán học huyền thoại người Thụy Sĩ Leonhard Euler (1707-83) đã nhiệt tình đề cử ông vào một vị trí trong Viện Hàn lâm Khoa học Phổ tại Berlin. Nhưng quốc vương Frederick II còn ngần ngại, tương truyền, sau khi gặp Lambert vị vua này đã kể lại với một người bạn rằng ông đã gặp một người ngu nhất trên toàn nước Phổ. Nhưng vị quốc vương sớm thay đổi định kiến, và nhận ra cách đánh giá trí tuệ của Lambert. Ngài Lambert ăn mặc sặc sỡ đã liên tục có những cống hiến lớn cho quang học, vũ trụ học, triết học, và toán học.[57] Đáng chú ý trong số này là cuốn sách *Theorie der Parallellinien* bàn về tiên đề song song mà ông viết năm 1766. Ông đã không cho xuất bản cuốn sách vì cảm thấy chưa thỏa mãn về cách giải quyết vấn đề.Tuy nhiên, nó đã được xuất bản sau khi ông mất vào năm 1788.

Cũng như Saccheri, linh mục dòng Tên xứ Pavia, Lambert khám phá những hệ quả của giả thuyết cho rằng các kết quả tương đương với tiên đề thứ 5 là sai. Đặc biệt, ông thu được công thức tính diện tích của một tam giác dựa vào tổng các góc của nó trong trường hợp giá trị này lớn hơn hoặc nhỏ hơn hai góc vuông. Ông lưu ý rằng

---

[57] Đặc biệt, Lambert đã chứng minh là số Pi (tỉ lệ của chu vi một vòng tròn với đường kính của nó) không phải là một số hữu tỉ (giống như căn của 2, không thể được viết dưới dạng tỉ số của hai số nguyên). Đây thực sự là một thành tựu lớn.

trên mặt cầu, nếu ta xem các đường thẳng là các vòng tròn lớn, thì tổng các góc trong của tam giác sẽ lớn hơn 180 độ, và ông đã đưa ra một cách chính xác công thức diện tích tam giác (Kết quả này, cùng với công thức, thực ra đã được người Hi Lạp biết đến trước đó). Ông tự hỏi liệu tổng các góc của một tam giác có thể nhỏ hơn hai góc vuông được không trên một bề mặt ảo thích hợp (và thậm chí ông còn đề cập đến các mặt cầu có bán kính liên quan đến căn bậc hai của một số âm).

KẾT THÚC THẾ KỶ 18

Đến năm 1800, những tư tưởng của trào lưu Khai sáng tràn ngập khắp nơi. Những hạt giống được gieo trồng bởi Descartes, Galileo và Newton đã bắt đầu cho trái chín. Không khí tràn ngập sự tự tin vào tri thức mới, niềm tin vào tư duy của con người và khoa học. Lần đầu tiên kể từ thời của các nhà hiền triết Ionia và trường phái Alexandria, vũ trụ quan được nhận thức lại. Các hội đoàn khoa học được hình thành trước đó - rất nhiều trong số đó nhận được sự hỗ trợ của những quân vương độc tài - được củng cố chắc chắn hơn. Ngoài các hội đoàn và các trường đại học lâu năm, những tổ chức giáo dục bậc cao được thành lập để đáp ứng nhu cầu ngày càng phức tạp của xã hội.

Những ý tưởng khoa học của thời đại và sự phản chiếu của chúng vào triết học và nghệ thuật đã dựng lên một thế giới quan, trong đó vũ trụ vận hành theo một loạt

các quy luật toán học mà con người có thể nhận biết. "Sapere āude! Hãy can đảm sử dụng lí lẽ của riêng bạn!... Đó là khẩu hiệu của thời đại Khai sáng" - nhà triết học có ảnh hưởng lớn người Đức, Immanuel Kant (1724-1804) đã viết như vậy[58] "Chúng ta xác nhận những chân lí này tự bản thân nó là hiển nhiên", là tuyên bố năm 1776 trong bản Tuyên ngôn Độc lập của nước Mĩ. Một số chân lí tự bản thân nó đã là hiển nhiên, và tất cả các chân lí đều có được tiếp cận nhờ lí luận và suy diễn. Theo Kant, một trong số các chân lí đó là những mệnh đề hình học của Euclid, và sự thật hiển nhiên là những mệnh đề đó áp dụng cho cả vũ trụ. Trên sân khấu khắp châu Âu, các anh hùng nam và nữ trong vở nhạc kịch "Tiếng sáo thần diệu" của Mozart tìm kiếm tình huynh đệ, điều này làm gợi nhớ mạnh mẽ những người thuộc trường phái Pythagoras - rao giảng tình yêu và lí luận mang tính hoàn vũ.

Ngược lại bối cảnh đó, sự không chắc chắn xung quanh tiên đề thứ 5 giống như một cơn cảm lạnh, dai dẳng và thậm chí hơi khó chịu. Không ai mảy may nghi ngờ về tính đúng đắn của tiên đề này, mặc dù một vài người đồng tình về sự cần thiết phải nêu ra các nguyên lí đơn giản hơn, tuy chưa ai phát hiện ra chúng. "Một vụ xì-căng-đan", nhà toán học và cũng là cuốn từ điển bách khoa toàn thư sống luôn dễ bị kích động, người Pháp, Jean d'Alembert (1717-1783), đã bực dọc thốt lên. Trong khi tất cả mọi người hi vọng rằng sự không chắc chắn này

[58] I. Kant, "*Was Ist Äufklarung?*" (n.p.: 1784).

sẽ được giải quyết sớm hay muộn, thì hầu hết nhận ra rằng việc đầu tư thời gian để khảo cứu một cách nghiêm túc vấn đề này hứa hẹn một sự bù đắp không chắc chắn.

Người đồng hương của d'Alembert, Adrien-Marie Legendre (1752-1833), một trong những nhà toán học thực sự tài năng đã cố gắng giải quyết vấn đề của tiên đề thứ 5. Tác phẩm *Cơ sở hình học* (Elements de géométrie) của ông - bộ sách đã đơn giản hóa và hiện đại hoá *Cơ sở* của Euclid - ra đời năm 1794. Nó trở thành cuốn sách nghiên cứu cao cấp hàng đầu của hình học cơ bản trong vòng một trăm năm, và đã được tái bản nhiều lần. Trong suốt 30 năm sau đó, Legendre nỗ lực thiết lập tiên đề song song, với các cố gắng khác nhau trong các ấn bản khác nhau. Tuy thất bại nhưng cho đến khi qua đời ông vẫn mang theo niềm tin mạnh mẽ vào chân lí của tiên đề.

Khi thế kỉ 18 sắp kết thúc, tư tưởng của phong trào Khai sáng, sự thay đổi kinh tế nhanh chóng cùng trình độ dân trí ngày một cao, tang thêm thách thức cho các ý tướng đã được tiếp nhận. Tuyên ngôn Độc lập (Mĩ) khẳng định quyền lợi của mỗi cá nhân, quyền tự do và quyền hưởng thụ giáo dục. Những màn khởi đầu của những chuyển biến xã hội được hun đúc bởi phong trào Khai sáng đã tạo ra một loạt thay đổi tự do và mang tính bùng nổ đánh dấu sự ra đời của thời đại mới của chúng ta. Hỗn loạn xã hội khuấy động cả châu Âu với các tác động khác nhau và không thể dự đoán được. Các khả năng mới được mở ra, những định kiến lạc hậu bị xóa bỏ. Người châu Âu kinh hoàng chứng kiến cuộc Cách mạng Pháp (từ năm 1789 trở đi) thắng lợi và cuốn phăng trật tự

cũ trong một bể máu. Chẳng có gì là thiêng liêng cả. Quân đội cầm đầu bởi những người thân thuộc với nhà vua và hoàng hậu Pháp đã bị hành hình - Louis XVI và vợ là Marie Antoinette - đã tấn công nước Pháp, qua đó tạo điều kiện thuận lợi cho Napoleon phản công, vươn lên đỉnh cao quyền lực, và cuối cùng chinh phục hầu hết châu Âu (từ năm 1805 trở đi).

GAUSS, LOBACHEVSKY, BOLYAI

Ba cá nhân, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), và János Bolyai (1802-1860), cuối cùng đã làm rõ vai trò của tiên đề thứ 5 và kho báu ẩn giấu trong đó

Gauss là nhà toán học nổi tiếng nhất nửa đầu thế kỉ 19, và là một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất mọi thời đại.[59] Cha ông là một người lao động chỉ có kiến thức tiểu học, chưa bao giờ thoát khỏi những công việc thấp kém. Mẹ ông là người giúp việc, thậm chí còn ít học hơn. Gia đình cha ông chuyển từ một nông trại đến thành phố Brunswick (tiếng Đức là Braunschweig), ngày nay thuộc Đức. Một vài năm trước đó không có mảy may cơ hội nào cho một người như Gauss được nhận một nền giáo dục đáng kể. Trong lớp tiểu học 50 học sinh, Gauss

[59] Xem tiểu sử và đánh giá học thuật các công trình của Gauss trong W. K. Buhler, *Gauss: A Biographical Study* (Berlin, New York. Springer-Verlag, 1981). Quyển sách này chứa một thư mục dẫn liệu được ghi chú rất chi tiết.

luôn đứng đầu. Ông tự học đọc và viết mà không nhờ sự can thiệp nào của bố mẹ trước khi bắt đầu đi học. May mắn cho ông (và cho cả chúng ta) là trợ lí của thầy giáo ông, Martin Bartels, mặc dù chỉ lớn hơn Gauss tám tuổi, đã học toán tại Göttingen. Bartels đặc biệt chú ý đến Gauss, cùng với thầy giáo, đã bố trí cho cậu bé đến học trong trường *gymnasium*, một loại trường trung học có chất lượng rất cao và đòi hỏi khắt khe của nước Đức, đào tạo các học sinh tài năng có dự định theo đuổi công việc nghiên cứu bậc cao. Ba năm sau, Gauss được giới thiệu với hoàng tử của vùng, công tước xứ Brunswick-Wolfenbüttel, người sau đó đã trợ cấp thường xuyên cho Gauss. Hình thức trợ cấp cho thanh niên trẻ tuổi đầy hứa hẹn, nhưng khó khăn về tài chính này không phải là hiếm thời đó, và là tiền thân của các loại học bổng học thuật ngày nay. Đây là một sự đầu tư thận trọng, do nhu cầu của chính phủ cần một lực lượng lao động có tri thức cao hơn bao giờ hết. Học bổng tạo điều kiện cho Gauss tiếp tục học tập, ban đầu tại một học viện mũi nhọn, định hướng cho khoa học cao cấp vừa mới thành lập[60] tại Brunswick (1792-1795), và sau đó tại Đại học Göttingen (1795-1798), khoảng 65 dặm về phía nam của Brunswick, lúc đó thuộc về một bang khác là Hanover.

Tại Göttingen, Gauss đã gặp Farkas Bolyai (1775-1856), sau này là cha của Janos Bolyai. Họ là một đôi bạn không hợp nhau cho lắm. Gia đình Farkas (còn gọi là Wolfgang) đã từng rất giàu có nhưng sa sút cùng với lịch

---

[60] Học viện Collegium Carolinum

sử lâu dài đấu tranh chống lại người Thổ Nhĩ Kì. Cha của Farkas đã từng quản lí một cơ sở bất động sản nhỏ, nhưng gia cảnh ngày càng sa sút. Farkas bỏ học ở tuổi mười hai và ông được đi học đại học nhờ công việc làm người giám hộ cho cậu bé tám tuổi Simon Kemenÿ, con trai của nam tước Kemenÿ. Farkas và Simon trở thành bạn thân, và ngài nam tước đã gửi Farkas cùng với Simon đến học tại Göttingen. Cả Gauss và Farkas đều ghi danh lớp học của Abraham Kästner, nhà toán học quan tâm rất nhiều đến tiên đề thứ 5 mà ta đã nhắc tới ở phần trước. Kästner lúc này vào độ tuổi cuối thất thập, đã bỏ lại các năm dạy học năng động nhất ở đằng sau. Gauss bỏ qua hầu hết các bài giảng của Kästner, thấy chúng quá cơ bản, và mọi người đồn rằng ông rất thích trêu chọc Kästner. Sau giờ học, Farkas và Gauss thảo luận về các tiên đề Euclid và sự độc lập có thể có của định đề song song, cũng như các môn toán khác. Farkas bỏ cuộc còn Gauss vẫn quan tâm đến vấn đề này trong suốt cuộc đời. Trước đây, ắt hẳn Gauss đã nghe nói tới các nghi vấn trong tiên đề thứ 5 thông qua Martin Bartels - người đã từng theo học với Kästner.

Gauss và Bolyai tốt nghiệp năm 1798 rồi trở về nhà trong tình trạng bấp bênh. Theo lệnh của công tước, Gauss gửi luận án tiến sĩ tới Đại học Helmstedt - trường đại học địa phương được công tước đỡ đầu - và nhận học vị năm 1799. Cuốn sách đầu tiên của ông, *Disquisitiones Arithmeticae*, xuất bản năm 1801, ngay lập tức được công nhận là một kiệt tác. Nhưng phải đến năm sau thì ông mới thực sự nổi tiếng. Tháng 6 năm 1801, một trong

những nhà thiên văn hàng đầu của Đức công bố vị trí quỹ đạo của tiểu hành tinh Ceres. Tiểu hành tinh này vừa mới được phát hiện ngày 1 tháng 1 rồi biến mất phía sau Mặt Trời vào ngày 11 tháng 2. Đa số dự báo là nó sẽ xuất hiện trở lại trong năm 1801 hoặc đầu năm 1802. Nhưng ở đâu? Vào lúc đó, khó khăn cơ bản của ngành thiên văn quan sát tính toán là tính toán quỹ đạo của các thiên thể dựa vào một số lượng nhỏ các quan sát thiên văn, mà mỗi quan sát đều chứa đầy sai sót. Gauss sử dụng một kĩ thuật mà ông đã phát minh, nhưng không công bố, để tính toán một quỹ đạo dự kiến khác hoàn toàn so với kết quả của các nhà thiên văn học khác. Khi Ceres xuất hiện đúng vào vị trí và thời điểm mà ông đã dự đoán, sự nổi tiếng cũng đến với ông.



Hình 26. Đài thiên văn của Gauss.

Gauss ngay lập tức nhận được lời mời trở thành giám đốc đài thiên văn ở Saint Petersburg, nhưng Brunswick

cũng đã bắt đầu xây dựng một đài thiên văn cho ông. Các nhà thiên văn người Đức cố giữ Gauss ở lại, cuối cùng ông nhận được một lời mời đến từ Đại học Göttingen. Họ cũng hứa sẽ xây dựng một đài thiên văn cho ông ở đó, và bố trí thêm một trợ lí tài năng. Năm 1805, Gauss nhận vị trí này, cưới vợ, và từ chối lời đề nghị từ Saint Petersburg hay xứ Bavaria. Thời khắc của ông đã tới. Vì ở tuổi bảy mươi, người bảo trợ của ông, công tước xứ Brunswick-Wolfenbüttel, lên nắm quyền quân đội Phổ, bị tử thương trong trận đánh Jena chống lại Napoleon. Mặc dù Hanover đổi chủ, trở thành một phần của vương quốc Westphalia phụ thuộc Pháp, nhưng người Pháp là những nhà quản trị tài ba, và Đại học Göttingen vẫn tiếp tục phát triển mạnh.

Mọi chuyện diễn ra một cách hoàn toàn khác với người bạn cũ Farkas của Gauss.[61] Người bảo trợ của Farkas, ngài nam tước đã phải chịu một số đảo lộn về mặt tài chính nên chỉ gửi được tiền cho con trai ông là Simon trở về nhà. Không tiền, Farkas ở lại Göttingen được một năm, sống dựa vào tiền vay mượn và sự hảo tâm của bạn bè. Cuối cùng, một người bạn gửi cho ông đủ tiền để chi trả các khoản nợ, sau đó ông lập tức đi bộ về Hungary. Ở Hungary, ông miễn cưỡng làm một công việc với đồng lương ít ỏi, tốn thời gian nhưng ổn định là giảng dạy toán học, vật lí, và hóa học tại trường Cao đẳng Calvin ở Marosvásárhely. Ông kết hôn năm 1801, con trai ông, János, ra đời sau một năm, vào tháng 12 năm 1802. Vợ

---

[61] Xem G. B. Halsted, "Biography. Bolyai Farkas [Wolfgang Bolyai]" *American mathematical Monthly* 3 (1896): 1-5.

ông dường như đã lo lắng cùng cực, sức khỏe ngày một xấu đi. Farkas làm thêm nhiều việc để tăng thu nhập: ông viết và xuất bản kịch, chạy bàn cho quán rượu của trường, thiết kế ngói và bếp gang. Vượt lên tất cả, ông vẫn tiếp tục làm toán trong thời gian rảnh rỗi.

Farkas dồn hết tâm sức vào con trai, người rất thông minh, và là người mà Farkas mong muốn sẽ trở thành nhà toán học. Ông tự dạy János ở nhà cho đến chín tuổi, cùng lúc đó, nhờ các sinh viên từ trường cao đẳng đến kèm cặp con, và tiếp tục dạy thêm toán ngay cả sau khi János vào trường gymnasium. Ở tuổi mười ba, János có thể chơi violin như một người chuyên nghiệp, thành thạo cơ học giải tích và tính toán, có thể nói nhiều ngoại ngữ. Tuy nhiên, Farkas không có tiền để cho János theo đuổi một nền giáo dục đại học hạng nhất. Ông viết thư cho Gauss năm 1816, đề nghị để János đến sống cùng với Gauss và học toán. Không nhận được hồi âm, Farkas và János quyết định cách tốt nhất mà cả hai cha con có thể làm là để János đi học trường Đại học Kĩ thuật Hoàng gia ở Vienna. János hoàn thành chương trình đào tạo kĩ thuật quân sự bảy năm chỉ trong vòng bốn năm rồi sau đó phục vụ mười một năm trong quân đội Áo-Hung, nơi mà ông nổi danh là một tay kiếm kiêm võ công hạng nhất trong toàn bộ quân đội hoàng gia.[62]

Cùng một ngọn gió mới của thời kì Khai sáng đã nâng vận mệnh của Gauss lên cao nhưng lại đẩy gia đình

---

[62] Theo J. J. O'Connor và E. F. Robertson trong tiểu sử trực tuyến của János Bolyai (www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Bolyai.html).

Bolyai xuống hố tuyệt vọng, vẫn thổi rất mạnh qua các vùng cực đông của châu Âu. Cha của Nicolai Ivanovich Lobachevsky, một thư ký trong văn phòng khảo sát đất đai tại Nizhny Novgorod ở Nga, qua đời khi Lobachevsky chỉ mới lên bảy, để lại người vợ với ba đứa con nhỏ mà không một xu dính túi. Bà chuyển nhà đến Kazan, ở rìa của Siberia, nơi con bà đi học tại trường gymnasium với học bổng nhà nước tài trợ cho các cậu bé nghèo nhưng tài năng. Lobachevsky vào trường Đại học bang Kazan vừa mới được thành lập năm 1805 như là một thành quả của cuộc cải cách mà Czar Alexander I tiến hành trên toàn nước Nga. Một trong số các giáo sư đầu tiên được bổ nhiệm tại trường lại là Martin Bartels, người đã làm trợ lí trong lớp tiểu học của Gauss. Là một giáo viên đầy tài năng, Bartels đã thuyết phục Lobachevsky, lúc đầu dự định học y, chuyển qua học toán. Như một định mệnh cho tương lai, khóa học của Bartels về lịch sử toán học lại dùng một văn bản nói đến tiên đề thứ 5.

Lobachevsky tốt nghiệp năm 1811, và thăng tiến qua nhiều cấp để lên chức giáo sư toàn năng 11 năm sau đó. Sự phục vụ trong một hội đồng đã dẫn dắt ông trở thành trưởng khoa toán học và vật lí, sau đó là tổng giám thư viện, tiếp theo là giám đốc đài thiên văn, và cuối cùng trở thành hiệu trưởng của trường. Là một nhà quản lí tài năng, ông chèo lái trường đại học ra khỏi thời điểm khó khăn trong những năm cuối đời của Czar (1819-1826), lúc mà chế độ chuyên quyền quay trở lại, tư tưởng khai sáng bị ngờ vực, một số giáo sư giỏi nhất, trong đó có Bartels, ra đi. Trong giai đoạn khi mà sự khoan dung được tăng

lên, cộng với sự lên ngôi của Nicholas Đệ nhất năm 1826, Lobachevsky đã trở thành nhà lãnh đạo đổi mới của trường, khôi phục lại các tiêu chuẩn học thuật và tinh thần khoa bảng.

Cho tới những năm 1820, mặc dù làm việc tại những nơi cách xa các trung tâm toán học lớn, Lobachevsky tại Kazan, và Farkas Bolyai tại Marosvásárhely, vẫn bỏ nhiều thời gian rảnh để nghiên cứu tiên đề thứ 5. Gauss cũng vậy, duy trì một sự quan tâm mạnh mẽ đối với hình học. Trong một bức thư gửi Bolyai, ông chỉ ra một chứng minh mà Bolyai đề xuất cho tiên đề thứ 5 là không đúng. Năm 1816, ông viết một bài điểm sách phê bình một số chứng minh biện giải cho rằng tiên đề thứ 5 có thể được suy luận từ những tiên đề khác.

Gauss cũng rất có tài trong thực nghiệm. Sau năm 1815, tất cả các nước lớn ở Trung Âu tài trợ cho các cuộc điều tra trắc địa, đo đạc chính xác để vẽ bản đồ các khu vực rộng lớn nhằm đo lại độ cong của Trái Đất. Năm 1818, Gauss đã trở thành giám đốc một dự án lớn nhằm khảo sát một cách chính xác Hanover và Bremen để kết hợp với các khảo sát của người Đan Mạch. Các vùng đất bằng phẳng và đầm lầy rừng rậm ven biển gây ra rất nhiều khó khăn. Người ta không thể tìm đủ các điểm cao để từ đó thực hiện các phép tính tam giác hay các đo đạc khác với một độ chính xác bất kì. Công việc hoàn thành khảo sát này chiếm phần lớn thời gian của Gauss từ 1818 đến 1832. Trong suốt quá trình đó, ông đã có nhiều đóng góp lớn cho ngành đo đạc địa chất.

Công việc này đã thôi thúc Gauss phải quan tâm đến hình học vi phân - bộ môn sử dụng giải tích để nghiên cứu hình học. Ông đã xuất bản một bài báo đoạt giải thưởng vào năm 1823, thảo luận những sự tương ứng một-một giữa các bề mặt bảo toàn góc. Năm năm sau, cuốn sách nhỏ bé và tinh tế *Disquisitiones generales circa superficies curvas* đưa ra các ý tưởng hình học của ông, vượt xa một cách đáng kể các công trình của Euler và những người khác. Cuốn sách không đề cập đến tiên đề thứ 5 và tạo ra các xu thế toán học đóng vai trò chủ đạo và vững chắc. Trong đó, Gauss đưa ra phương trình đo khoảng cách trên các bề mặt bất kì trong không gian ba chiều. Ông định nghĩa một khái niệm, nay được gọi là *độ cong Gauss*, để đo độ cong của bề mặt, và chỉ ra rằng đại lượng này có thể được tính toán từ các đo đạc thực hiện trên bề mặt - không cần phải nhìn ra khỏi bề mặt. Thêm vào đó, ông cũng khám phá ra mối quan hệ giữa diện tích các tam giác trên một bề mặt và độ cong trung bình bên trong tam giác.

BÊN NGOÀI TIÊN ĐỀ THỨ 5

Đến giữa thập kỉ 1820, hoặc có thể trước đó, Gauss có vẻ như đã tự thuyết phục mình rằng tồn tại những dạng hình học mà trong đó tiên đề thứ 5 không đúng. Tháng 11 năm 1824, ông đã viết cho người bạn Taurinus của mình:

> "Giả định tổng ba góc của một tam giác nhỏ hơn 180° dẫn đến một dạng hình học lạ, khá khác với hình học của chúng

> ta [tức là hình học Euclid] nhưng nhất quán một cách triệt để, mà tôi đã phát triển đến mức tôi hoàn toàn hài lòng - tôi có thể giải quyết mọi vấn đề trong đó ngoại trừ việc xác định một hằng số vì điều này là khó về mặt cơ bản... Cho dù ba góc của một tam giác có thể nhỏ cỡ nào tùy ý, chỉ cần có các cạnh đủ lớn, thì diện tích của tam giác không bao giờ có thể vượt quá, hoặc thậm chí đạt đến một giới hạn nhất định, bất kể độ lớn của các cạnh như thế nào."[3]

Gauss chẳng bao giờ công bố bất cứ điều gì như thế này. Mặc dù nổi tiếng trên toàn thế giới cũng như có quan hệ rộng rãi trong giới toán học, ông vẫn giữ một sự tư cô lập nhất định. Bảo thủ, ý thức được vận may của mình, và luôn cảm thấy vị trí của mình có một chút mong manh, ông đặc biệt chú ý không làm mếch lòng những người có nhiều quyền lực hơn mình. Mối quan hệ của ông với cha mình là không tốt. Người vợ đầu tiên của Gauss mất năm 1808, chỉ ba năm sau đám cưới, trong khi sinh người con thứ ba. Ông kết hôn với người bạn thân nhất của vợ mình và có thêm ba người con khác, nhưng cuộc hôn nhân này không bao giờ đầm ấm như lần đầu tiên. Mối quan hệ với những người con trai cũng thật rắc rối. Ông có vẻ lạnh lùng, cô đơn. Thậm chí nhà thám hiểm, nhà chính trị nổi tiếng của Đức là Alexander von Humboldt, người có quan hệ nồng hậu với nhiều nhà toán học, đã ví Gauss như một tảng băng.

Gauss biết rằng việc xuất bản kết quả của ông về tiên đề thứ 5 sẽ tạo nên chấn động, mà ông thì không muốn sự

---

[3] Gauss, *Werke* (Göttingen: K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1863-1933), 8: 119.

công khai hoặc gặp bất cứ khó chịu nào. Trong nhiều năm qua, mối quan tâm đến tiên đề thứ 5 đã đi vào triết học cũng như báo chí phổ thông. Ông ý thức được có biết bao nhiêu sách vở dành riêng cho chủ đề này, và có biết bao nhiêu bí ẩn đang chờ người đọc giải mã. Ông cũng dành một sự hoài nghi lành mạnh đối với các nhà triết học: "Khi một nhà triết học nói cái gì đó là đúng, thì nó là tầm thường. Khi ông ta nói điều gì đó không tầm thường, thì nó là sai."[64]

Cùng thời gian đó, khi János Bolyai nói với cha mình vào năm 1820 rằng ông đang nghiên cứu tiên đề thứ 5. Đã được cảnh báo từ trước, nên cha ông trả lời, cố gắng khuyên can János:

> "Cha khẩn cầu con không nên tìm cách nắm bắt lí thuyết song song, con sẽ mất hết thời gian cho nó... Đừng thử... cho dù là theo cách mà con đã đưa ra hay bất cứ cách nào khác... Cha đã trải qua những sự ảm đạm và tăm tối của bóng đêm này và chôn vùi trong nó từng tia sáng, từng niềm vui của cuộc sống. Vì Chúa, cha yêu cầu con hãy từ bỏ nó. Cha sợ nó cũng không kém gì nỗi sợ sự đam mê dục lạc, bởi vì nó sẽ lấy đi của con tất cả thời gian, tàn phá con về sức khỏe, sự thanh thản trong tâm trí và hạnh phúc trong cuộc sống."[65]

---

[64] Trích dẫn từ Gauss bởi J. J. O'Connor và E. F. Robertson, www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/Gauss.html.

[65] Trích từ V. Kagan, *N. Lobachevsky and His Contribution to Science* (Moscow: Foreign Languages Publishing House, 1957).



Hình 27. Carl Friedrich Gauss.

Những từ ngữ mạnh mẽ trên phản ánh kinh nghiệm cay đắng của người cha Bolyai.

Ban đầu, János thử thay tiên đề Euclid bằng một phát biểu khác có thể được suy luận từ các tiên đề kia. Một năm sau, ông đã bỏ cách tiếp cận này nhưng cũng bỏ qua lời khuyên can của cha mình. Ông bắt đầu làm việc nghiêm túc về những hệ quả của việc giả sử rằng tiên đề thứ 5 là không đúng. Những ghi chép của ông cho thấy ông đã bắt đầu phát triển những gì mà bây giờ chúng ta gọi là hình học hyperbol. Năm 1823, ông viết thư cho cha nói rằng ông đang trong quá trình tạo ra "một thế giới mới chưa từng có ..." Ông dường như đã hoàn thành nó năm 1824.

Sau một số hoài nghi ban đầu, người cha Bolyai đã bị thuyết phục bởi giá trị của công việc mà con trai mình theo đuổi. Ông thúc giục János trình bày điều đó như là một bản phụ lục trong tác phẩm vĩ đại của chính ông - *Tentamen* - một nền tảng chặt chẽ và có hệ thống của hình học, giải tích, số học và đại số xuất bản năm 1831.[6] Farkas gửi một bản sao cho Gauss - người mà sau khi đọc phụ lục đã viết cho một người bạn tên Gerling, "tôi nghĩ nhà hình học trẻ tuổi Bolyai này là một thiên tài hàng đầu." Gauss viết cho Bolyai cha:

> "Đây là một vài lời về cậu con trai của bạn. Nếu tôi bắt đầu bằng cách nói rằng tôi không thể khen ngợi tác phẩm này, đầu tiên bạn sẽ rất ngạc nhiên, nhưng tôi không thể làm khác. Bởi vì ca ngợi nó chẳng khác gì đề cao bản thân tôi. Toàn bộ nội dung của bài luận, con đường mà con trai của bạn đã đi, và những kết quả mà cậu ta đạt được, trùng khớp với khám phá của riêng tôi, khoảng 30 đến 35 năm về trước. Tôi thực sự bị sốc. Còn về phần công trình của tôi, đến nay tôi vẫn chưa công bố lên báo, ý định của tôi là không xuất bản khi tôi còn sống. Hầu hết mọi người không có ý tưởng gì rõ ràng về các câu hỏi mà chúng ta đang bàn tới, và tôi tìm thấy rất ít người đặc biệt thích thú những gì tôi nói về chủ đề này. Để có một mối quan tâm như vậy, người ta đầu tiên phải suy nghĩ thật cẩn thận về bản chất thực sự của những điều cần thiết nhưng tất cả đều gần như không chắc

---

[6] Bản dịch tiếng Anh tiểu luận của Bolyai và Lobachevsky cùng với nhiều dẫn liệu khác có thể được tìm thấy trong R. Bonola, *"Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development"* dịch bởi H. S. Carslaw (New York: Dover, 1955)

chắn. Mặt khác, tôi đã có ý định sau này sẽ trình bày hết ra giấy, ít nhất là để nó không cùng chết với tôi. Do đó, đây là một bất ngờ sung sướng đối với tôi vì tôi không còn phải bận tâm về vấn đề này nữa, và tôi đặc biệt vui mừng khi biết rằng người đi trước tôi trong vấn đề này lại là con trai của người bạn cũ tôi."[67]

Farkas hài lòng với thư hồi âm, nhưng János thì như bị tan vỡ. Sức khỏe tinh thần của ông bắt đầu xấu đi. Ông trở nên khó chịu, không ổn định, và được bố trí nghỉ hưu vào năm 1833. Như thể điều này vẫn chưa đủ tồi tệ, Bolyai thậm chí còn không phải là người đầu tiên công bố khám phá này. Lobachevsky cũng đã bắt đầu làm việc với tiên đề thứ 5 vào những năm đầu thập kỉ 1820, và nhận ra rằng một nền hình học mà ta bỏ qua tiên đề thứ 5 dường như hoàn hảo hơn.

Ý tưởng của Lobachevsky bắt nguồn từ sự đối lập của ông trước chủ nghĩa duy tâm siêu việt của Kant - cho rằng những ý tưởng như không gian, thời gian, sự mở rộng đã được biết đến trước cả kinh nghiệm, và rằng tâm thức áp đặt mệnh lệnh lên trên kinh nghiệm của cảm giác. Đối với Lobachevsky, không gian là một khái niệm đến sau khi kinh nghiệm hình thành, xuất phát từ tâm trí con người thông qua các kinh nghiệm bên ngoài. Ông công bố kết quả của mình vào năm 1826 và xuất bản lí thuyết hình học Phi-Euclid năm 1829. Ban đầu ông gửi bài báo đến Viện Hàn lâm Khoa học Saint Petersburg, nơi thu hút khá

---

[67] Gauss, *Werke* (Gottingen: K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, 1863-1933), 8:221. Trao đổi giữa Gauss và Bolyai cha được thu thập lại trong tập sách của Gauss, *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai* (Leipzig: B. G. Teubner, 1899).

nhiều độc giả. Tuy nhiên, nhà toán học hàng đầu của Nga lúc đó, Mikhail Vasilevich Ostrogradsky, rất nổi tiếng ở Tây Âu, đã từ chối bài báo. Vì vậy, Lobachevsky xuất bản bằng tiếng Nga, trong một tờ báo phổ thông định kì của địa phương, và từ năm 1835 đến năm 1839 xuất bản tiếp, vẫn bằng tiếng Nga trong các kỉ yếu học thuật của Kazan. Không ngạc nhiên, công trình này phần lớn không được chú ý.

Vậy điều gì đã xảy ra? Gói gọn trong vài từ, không xảy ra gì cả. - Ít nhất là vào lúc đó.

Lobachevsky tiếp tục công việc quản lí, bên cạnh đó dành thời gian cho toán học. Kĩ năng quản lí của ông đã được khắp nơi đánh giá cao. Ông đã kéo Đại học bang Kazan ra khỏi một số cuộc khủng hoảng: xây dựng lại khoa sau năm 1826, cứu sống nhiều nạn nhân của trận dịch tả năm 1830, xây dựng lại các tòa nhà đại học sau sự tàn phá của một đám cháy năm 1842. Những nỗ lực của ông trong việc phổ biến khoa học và trong công cuộc hiện đại hoá nền giáo dục tiểu học và trung học của vùng mạnh mẽ như của Hercules. Lobachevsky kết hôn với một phụ nữ kém mình nhiều tuổi, xuất thân từ một gia đình giàu có vào năm 1832, và họ có với nhau bảy người con. Khó khăn tài chính, sức khỏe kém, mắt ngày càng lòa, và cái chết của con trai cả đã tàn phá những năm cuối đời ông.

Đáng buồn thay, công trình toán học của Lobachevsky không được công nhận rộng rãi khi ông còn sống. Tuy nhiên, ông vẫn tiếp tục xuất bản. Ông cũng xuất bản một phần công trình của mình bằng tiếng Pháp trên một tạp chí toán học hàng đầu thời đó vào năm 1837, và một cuốn sách bằng tiếng Đức năm 1840 về lí thuyết song song. Cuốn sách này gây ấn tượng mạnh cho Gauss,

người sau đó sắp xếp để bầu Lobachevsky vào Viện Hàn lâm Khoa học Göttingen, đồng thời học tiếng Nga để đọc phần còn lại công trình của Lobachevsky. Tuy nhiên, theo thói quen, Gauss không công khai tuyên bố ủng hộ công trình này. Lobachevsky chết trong mù lòa, nghèo khổ, và trong nỗi đau đớn tám can vào ngày 24 tháng 2 năm 1856.

Farkas Bolyai nghỉ dạy từ năm 1851, và mất vào ngày 20 tháng 11 năm 1856 sau khi chịu đựng một loạt các cơn đột quỵ, để lại người vợ thứ hai. Người vợ đầu tiên của ông đã mất vào năm 1821. Di chúc của ông tóm tắt một cách chua cay cuộc đời sau khi trở về từ nước Đức như sau:

> "Cho đến khi trở về từ nước Đức, đó đã là những bình minh của niềm hi vọng về những ngày tuyệt đẹp, - nhưng chỉ sau một vài ngày đầy ắp lửa nóng cùng băng giá, đã trở thành những ngày mưa trên bầu trời luôn u ám, cho đến đợt tuyết lạnh gần đây."[68]

Năm 1833, János Bolyai nghỉ hưu, về ở trên một mảnh đất của gia đình, thừa hưởng từ bà nội. Ông bắt đầu quan hệ một cách hợp pháp với một phụ nữ mà cha của ông đã từng không chấp thuận, và là nguyên nhân dẫn đến mối bất hòa giữa hai cha con. Ông tiếp tục theo đuổi toán học, nhưng cách xa xu thế chủ đạo. Gauss đã nhắc Bolyai cha về công trình của Lobachevsky, mà có lẽ từ đó, đến năm 1846, János mới biết về bài báo năm 1829. János lập lại

---

[68] Trích từ J. J. O'Connor và E. F. Robertson, tiểu sử trực tuyến của Farkas Bolyai (www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Bolya_Farkas.html).

chứng minh trong bài báo này theo cách của mình, ghi chú cẩn thận và viết vội các suy nghĩ đau đớn của ông. Sự ngưỡng mộ của ông đối với lập luận của Lobachevsky được nhấn mạnh bởi những suy đoán đen tối cho rằng Lobachevsky không tồn tại, tất cả chỉ là do Gauss dựng lên để cướp công của ông. János kết hôn vào năm 1849, sau khi Hungary tuyên bố độc lập, bỏ vợ năm 1852, và chuyển từ toán học sang công việc tìm ra một lí thuyết tổng quát về kiến thức. Ông qua đời vì bệnh viêm phổi ngày 27 tháng 1 năm 1860, thọ 57 tuổi. Ông không công bố gì nữa sau bản phụ lục trong cuốn sách của cha mình, nhưng đã để lại hơn 20.000 trang bản thảo chép tay về toán học. Những bản thảo này hiện nay nằm ở thư viện Bolyai-Teleki ở thành phố Tirgu-Mures.

Ngay cả vào năm 1850, rất ít người công nhận những dạng hình học khả dĩ mà trong đó tiên đề thứ 5 không đúng. Nếu Gauss nói ra, mọi chuyện đã có thể khác, nhưng những năm cuối đời, ông thậm chí còn bước ra khỏi thế giới khoa học. Ông mất ở Göttingen vào năm 1855 mà không công bố bất cứ điều gì về tiên đề thứ 5.

Theo thời gian, kết quả của Gauss, Bolyai, và Lobachevsky dần trở thành một phần của xu hướng toán học chủ đạo. Việc công bố các bức thư của Gauss sau khi ông qua đời và những ghi chép khoa học đã làm rõ rằng Gauss là người đầu tiên phát hiện ra hình học Phi-Euclid, và thúc đẩy sự chấp nhận công trình của Bolyai và Lobachevsky. Như một sự trớ trêu cuối cùng, uy quyền của Gauss đã dẫn đến một số suy đoán vô căn cứ và hiện nay đã hoàn toàn bị bác bỏ cho rằng cả Bolyai lẫn

Lobachevsky đã ít nhiều chịu dựng ảnh hưởng của Gauss qua các con đường khác nhau: Bolyai thì thông qua cha mình còn Lobachevsky thì thông qua Bartels. Tom Lehrer, một nha toán học kiêm nhạc sĩ, đã viết một bài ca trào phúng cực kì chua cay và rất vui nhộn trong thời kì chống chiến tranh Việt Nam, bóng gió về nỗi nhục nhã (mặc dù hơi thái quá) mà ông đã hát bằng tiếng Anh nhái theo giọng Nga nặng trịch:

Ai tạo nên tôi một thiên tài như hôm nay,
Nhà toan học mà tất cả mọi người đều nhắc tới,
Người giáo sư nào đã biến tôi trở thanh như vậy?
Người Thầy vĩ đại nhất chưa bao giờ vương phấn lên ao khoác.

Người xưng đáng được vinh danh
Người đáng trách,
Và Nicolai Ivanovich Lobachevsky là tên của ông
Xin chào
Nicolai Ivanovich Lobach-

Tôi không bao giờ quên ngày đầu tiên tôi gặp người vĩ đại Lobachevsky
Trong một từ ông nói với tôi bí mật của thanh công trong toán học:
Đạo văn!

Đạo văn
Không được để công trinh của người khác trốn khỏi mắt của bạn,
Hãy nhớ tại sao Chúa lại tạo ra đôi mắt,
Hãy vì vậy mà không chớp mắt,
Nhưng, đạo văn, đạo văn, đạo văn
Để chắc ăn hãy luôn gọi điều đo là "nghiên cưu"

Kể từ khi tôi gặp người đàn ông này
Cuộc sống của tôi không bao giờ như cũ nữa
Và Nicolai Ivanovich Lobachevsky là tên của ông.
Xin chào
Nicolai Ivanovich Lobach-

DI SẢN EUCLID

Những nỗ lực chứng minh bất thành tiên đề thứ 5 dẫn đến một sự hiểu biết thấu đáo về nhiều kết quả tương đương khác. Trong số đó có những phát biểu sau đây:

Gói Euclide: Những mệnh đề tương đương với tiên đề thứ 5

1. Cho một đường thẳng *l* và một điểm *P* không nằm trên nó, chỉ có chính xác một đường thẳng đi qua *P* trong mặt phẳng xác định bởi *l* và *P* mà không cắt *l*.
2. Tổng các góc trong một tam giác là 180 độ (nghĩa là hai góc vuông)
3. Tỉ lệ của chu vi đường tròn với đường kính là bằng nhau cho tất cả các vòng tròn, bất kể vòng tròn lớn hay nhỏ như thế nào.
4. Cho một tam giác bất kì, tồn tại vô số tam giác nhỏ hơn hay lớn hơn với các góc có cùng độ lớn và các cạnh tỉ lệ với nhau.
5. Định lí Pythagoras.

Nếu chúng ta chấp nhận bốn tiên đề đầu tiên và một trong những kết quả này, tiên đề thứ 5 và các kết quả khác cũng sẽ đúng. Nếu chúng ta chấp nhận năm tiên đề Euclid, thì tất cả các kết quả trong khung trên cũng sẽ đúng. Công trình của Gauss, Bolyai, Lobachevsky cho thấy sự tồn tại của nhiều dạng hình học mà trong đó tiên đề thứ 5 - và do đó tất cả các kết quả trong khung - không đúng. Điều này chứng minh cho việc Euclid xếp chung tiên đề thứ 5 như các tiên đề khác là việc làm đúng đắn. Nó không thể được chứng minh từ bốn tiên đề đầu tiên. Để hiểu được hình học phẳng quen thuộc được biết đến từ thời Babylon, chúng ta phải giả định (có nghĩa là, chấp nhận mà không cần bằng chứng) rằng tiên đề thứ 5 - hoặc một điều gì đó có độ phức tạp tương đương - là sự thật.

Nhưng bản chất thật sự của các tiên đề Euclid, đặc biệt là tiên đề thứ năm, có thể sẽ không ai hiểu được trong nhiều thập kỉ nữa. Đương nhiên, ta không thể suy tiên đề thứ 5 ra từ các tiên đề khác. Và, đương nhiên, tồn tại các dạng hình học khác mà trong đó tiên đề thứ 5 không đúng. Nhưng những dạng hình học này không chỉ là những sự tò mò mang tính logic, những sự bất thường sinh ra từ những thất bại lẻ tẻ của bốn tiên đề đầu trong việc mô tả thực tế một cách thỏa đáng. Những dạng hình học này cũng mang tính thực tiễn, cũng có nhiều giá trị giống như hình học phẳng mà ta quen thuộc. Toàn bộ điều này sẽ trở nên rõ ràng nếu ta nhìn sự vật "đúng" cách - cách "đúng" này rộng và phóng khoáng hơn rất nhiều, và hoàn toàn khác với cách nhìn nhận hình học của mọi người trước năm 1850. Sự thay đổi căn bản trong

cách nhìn - đã làm sáng tỏ tất cả mọi điều và mở đầu nhận thức hiện đại của chúng ta - được đặt nền móng vào năm 1854 trong bài giảng tập sự của sinh viên nhút nhát nhưng kiệt xuất của Gauss - Bernhard Riemann. Bài giảng này là một trong những khoảnh khắc vĩ đại nhất của lịch sử khoa học, và cực kì quan trọng đối với hiểu biết của chúng ta về công trình của Poincare cũng như về tất cả hình học hiện đại và topo học.

7

Bài giảng tập sự của Bernhard Riemann

Những người tụ tập đông đủ trong giảng đường của MIT tháng 4 năm 2003 để nghe Grigory Perelman diễn thuyết biết rằng họ đang ngồi chứng kiến một cuộc cách mạng của tri thức. Nhưng những người có mặt trong giảng đường của trường Đại học Göttingen, ngày 10 tháng 6 năm 1854 để nghe bài giảng của Bernhard Riemann, *Về những nền tảng nâng đỡ hình học* (On the Foundations that underlie Geometry), thì không hẳn như vậy. Đó là dịp mà Riemann trình bày bản thuyết trình luận án Habilitation - một buổi thuyết trình chính thức và là một bài kiểm tra cuối cùng trong một quá trình dài, truyền thống có từ thời Trung cổ, mà phải vượt qua nó ứng cử viên mới được phép giảng dạy tại một trường đại học. Chuyển suy nghĩ của mình thành từ ngữ thật không dễ dàng cho Riemann, và ông đã rất khổ công cho bài giảng trong sáu tháng trước đó. Ông cũng đã lao tâm để làm bài giảng dễ hiểu cho tất cả mọi người có mặt, nhưng cử tọa thật sự của ông chỉ là một người: Carl Friedrich Gauss, thầy hướng dẫn

của ông. Rất ít người có mặt khi đó nắm bắt được ý nghĩa hay sự đột phá của bài giảng. Nhưng Gauss là một trong số rất ít đó.

Bài phát biểu thâu tóm lại toàn bộ quá trình 3.000 năm của hình học, bằng tiếng Đức mà hầu như không cần đến các kí hiệu toán học. Nó không được công bố cho đến sau cái chết của Riemann, gần một thập kỉ sau, và phải mất một hoặc hai thập kỉ để trở thành một trong những tư tưởng chủ đạo của nền toán học thế giới. Nó tạo nền móng cho ngành hình học vi phân của chúng ta hiện nay. Nếu không có nó, sẽ không có thuyết tương đối rộng, phần lớn các công trình của Poincaré cũng như tất cả các công trình của Perelman sẽ không thể được nghĩ đến. Xúc động một cách rất hiếm thấy, ngay sau bài giảng, Gauss tâm sự với một đồng nghiệp rằng bài thuyết trình đã vượt qua mọi mong đợi. Ông biết rằng ông đã chứng kiến một thành tựu chưa từng có của trí tuệ. Gauss qua đời một năm sau đó nhưng ông đã có được niềm hạnh phúc: thoáng thấy trước tương lai.

Ngày nay, một phần nhờ Học viện Toán học Clay và vài cuốn sách gần đây, công chúng đã biết đến Riemann nhiều hơn.[64] Mặc dù bài giảng tập sự của ông nằm trong

---

[64] Các cuốn sách đó nói về giả thuyết Riemann, một bài toán nổi tiếng mà chúng ta sẽ nói tới sau này, và cũng là một trong những bài toán mà Học viện Toán học Clay định giá một triệu đô: J Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics* (Washington: Joseph Henry Press, 2001); K. Sabbagh, *The Riemann Hypothesis: the Greatest Unsolved Problem in Mathematics* (New York: Farrar, Strauss, and Giroux, 2002); M. du Sautoy, *The Music of the Primes. Searching to Solve the*

số những ví dụ lớn nhất của lịch sử về việc một sự kiện khoa học bị đánh giá thấp lúc đương thời, nhưng công trình của Riemann cũng đã được các nhà toán học tôn kính. Điều đặc biệt lạ thường là tổng hợp toàn bộ các công trình của Riemann chỉ gói gọn trong chưa đầy sáu trăm trang - chưa bằng độ dài của một cuốn tiểu thuyết thuộc loại hay ở thế kỉ 19. Cuốn tiểu thuyết *Chiến tranh và hòa bình* của Tolstoy dài gấp đôi. Mặc dù tài năng nở muộn và qua đời trước ngày sinh nhật lần thứ bốn mươi, nhưng Riemann đã cách mạng hóa hầu như tất cả mọi thứ mà ông tham gia vào.

CUỘC ĐỜI CỦA RIEMANN

Sinh năm 1826, Riemann là một trong sáu người con của một mục sư Tin lành không tiền của. Bệnh lao hoành hành trong gia đình, và Riemann không bao giờ thực sự khỏe mạnh. Mẹ mất khi ông lên bảy, cha ông chính là người nuôi dưỡng các con. Một người anh qua đời trước

---

Greatest Mystery in *Mathematics* (New York: Harper Collins, 2003). Cuốn sách của Derbyshire đã làm cực tốt công việc trình bày toán học cho độc giả không chuyên. Giả thuyết Riemann thậm chí gần đây còn được nhắc tới trong một cuốn tiểu thuyết trinh thám (Perri O'Shaughnessy, A *Case of Lies* [New York: Random House, 2005]). Một cuốn sách hay tuyệt vời và chứa đựng nhiều nội dung học thuật, mô tả cuộc đời và công trình của Riemann (tuy nhiên, nó đòi hỏi một kiến thức toán học nhất định) là D. Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics* (Boston: Birkauser, 1999) (Đây là bản dịch tiếng Anh từ tiếng Đức của A. Shenitzer).

ông, và ba trong số các em gái của ông cũng mất sớm. Riemann rất có hiếu, mộ đạo, và nhút nhát. Bởi vì tính rụt rè, ông không bao giờ thật sự thoải mái bên ngoài gia đình riêng của mình, và thấy công việc giảng dạy là một thử thách. Làm thế nào mà con trai của một mục sư nghèo, được chuẩn bị chu đáo để nghiên cứu thần học, một chiều lại tự mình đứng trên bục giảng diễn thuyết cho một nhóm người trong đó có Gauss, nhà toán học nổi tiếng nhất thế giới, về một chủ đề chấn động mà tự thân Gauss còn không dám nói về nó? Chắc chắn Riemann khi diễn thuyết cũng đã biết, trong số các cử tọa còn có một vị giáo sư triết học cực kì thần tượng Kant và có thể đứng phắt lên phản biện bất kì hoài nghi nào về tính ưu việt của Euclid. Ta chỉ có thể đoán về điều gì đã khiến ông can đảm như vậy, và chúng ta sẽ cùng thưởng thức một sự suy đoán nho nhỏ ở phần cuối của chương kế tiếp.

Quá trình đào tạo và nền tảng của Riemann là kết quả của các nỗ lực về xã hội và kinh tế mà ngày nay vẫn còn góp phần định hình nên nền toán học và khoa học của chúng ta, mà việc hiểu rõ quá trình đó là rất quan trọng. Ông học ở nhà dưới sự dìu dắt của cha mình cho đến năm mười bốn tuổi ở làng Quickborn tại xứ Hanover nước Đức, sau đó ông lên trọ học ở thị trấn gần đó, trong một trường gymnasium. Ông lên Đại học Gottingen để nghiên cứu thần học vào năm 1846.

Nước Đức thời đó giống như một nồi áp suất đang sắp sửa nổ tung. Sau thất bại của Napoleon, Hội nghị Vienna 1814-1815 đã khôi phục một cách thành công cán cân quyền lực quen thuộc vốn có ở châu Âu trước thời kì

hỗn độn do Cách mạng Pháp gây ra. Một liên bang Đức lỏng lẻo với ba mươi lăm bang tự trị và bốn thành phố độc lập, tự do được thành lập với mục tiêu chung là củng cố vị thế của các hoàng gia, duy trì các đặc quyền cho tầng lớp quý tộc và giáo hội, và dập tắt những ý tưởng khó chịu của phong trào Khai sáng. Sự cải cách tự do theo trường phái của Napoleon bị cuộn ngược trở lại, kiểm duyệt được áp đặt và báo chí tự do bị cấm.

Nhưng con sâu đã cắn sâu vào trong quả táo chống đối. Luật lệ hà khắc không duy trì được sự ổn định, và căng thẳng luôn xảy ra trong vòng ba mươi năm. Phần lớn dân số vẫn sống ở nông thôn, nhưng rất ít người sở hữu đất đai mà họ đang trồng trọt. Lượng người mỗi lúc một lớn chuyển đến các thị xã, thành phố. Các cuộc nổi dậy lẻ tẻ về các vấn đề tiền lương, điều kiện sống, sự thiếu tự do xã hội đã bị dập tắt một cách nhanh chóng và thường là dã man, dẫn đến tình trạng bạo động càng lúc càng gia tăng. Ngay cả thành phố ngái ngủ Göttingen của Hanover cũng không thể tránh khỏi ảnh hưởng. Ngoại trừ những năm thuộc triều đại Napoleon dưới sự cai trị của vương quốc tạm thời Westphalia, phần còn lại thời gian, Hanover thuộc về các vị vua nước Anh. Với sự lên ngôi của nữ hoàng Anh Victoria năm 1837, tất cả mọi điều đã thay đổi. Pháp luật Hanover không công nhận tính hợp pháp của các nhà cầm quyền nữ, vì vậy chức vị công tước xứ Hanover được Victoria trao lại cho ông chú trẻ tuổi nhưng cực kì bảo thủ là công tước xứ Cumberland. Ông nhanh chóng huỷ bỏ hiến pháp tương đối tự do của Hanover. Bảy vị giáo sư nổi tiếng của Göttingen - những

người đã ký một lá thư phản đối - bị đuổi việc ngay sau đó, và điều này đã tạo ra một làn sóng bất bình lớn. Nó nhanh chóng lan rộng ra ngoài giới hạn của Hanover, bởi vì ở giai đoạn này của thế kỉ 19, đường sắt đã liên kết nhiều vùng của Đức, và qua trình này đã giúp củng cố một nhận thức mới của những người Đức - đó là việc họ cùng chia sẻ một ngôn ngữ và nền tảng di sản chung. Trên khắp nước Đức, các tổ chức sinh viên đều nêu cao ngọn cờ "Ehre, Freiheit, Vaterland" (Danh dự, Tự do, Tổ quốc).

Quyền tự do công dân đi đôi với cảm tình chủ nghĩa quốc gia đã tạo làn gió mới và đầy quyền năng. Sự thiếu thốn lương thực đã gây ra nạn đói năm 1847 và dẫn đến tình trạng bất ổn sau đó. Tháng 3 năm 1848, vua Pháp bị lật đổ, nền Đệ nhị cộng hòa của nước này lên ngôi đã kích thích cách mạng tại nước Đức. Những cuộc biểu tình khổng lồ nổ ra ở các bang khác nhau dẫn đến sự ra đời của một hiến pháp bảo đảm quyền tự do công dân và sự hình thành của một cơ quan chính phủ dân chủ do dân bầu. Ngay cả hai bang quyền lực nhất, Áo và Phổ, cũng đã bị ảnh hưởng sâu sắc.

Đó là nền tảng xã hội của những năm tháng mang tính định hình nhất của nhân cách trí tuệ Riemann. Một thời gian ngắn sau khi đến Göttingen vào năm 1846, ông theo học một vài môn toán, và viết thư xin phép cha chuyển từ thần học sang toán học. Với sự cho phép của cha, Riemann đã trải qua những năm học 1847-1849 tại Berlin - chính là nơi khốc liệt nhất của cuộc cách mạng. Điều đó cũng đưa ông đến với trung tâm của sự hoạt

động toán học sống động nhất trên thế giới. Ở đó, các giáo sư toán học nổi tiếng như Jakob Steiner, Carl Jacobi, Lejeune Dirichlet, và Gotthold Eisenstein, thu hút sinh viên từ khắp nơi của châu Âu. Giải tích được áp dụng vào các hệ thống tính toán mới, với các kết quả tuyệt vời. Các hàm số mới với những đặc tính đáng kinh ngạc dường như được khám phá mỗi ngày. Các khám phá toán học, kết hợp với bất ổn xã hội và chính trị của những năm đó, đã tạo ra một môi trường phong phú, thú vị và hoàn toàn hỗn độn. Ở đó, Riemann đã lĩnh hội được chuyên ngành giải tích phức và rất nhiều ngành toán học mới. Ông tiếp thu được rất nhiều từ Dirichlet, một người thụ hưởng nền giáo dục Pháp và có cách tư duy trừu tượng rất giống với Riemann.

Cách mạng bị đình trệ sau nhiều tháng phát triển. Đến mùa thu năm 1848, giới quý tộc Phổ đã giành lại quyền kiểm soát Berlin, quân đội lại càn quét đường phố. Cuộc cách mạng bị thất bại. Sự đàn áp trở lại và hàng trăm ngàn người di cư qua Mĩ, gia nhập dòng người đi tránh nạn đói từ Ireland. Sự thất bại của những người cách mạng, hay còn gọi là những người Bốn mươi tám, và sự lỗi hẹn với sự thống nhất mang tính dân chủ sẽ gây ra hậu quả tàn khốc sau này trong thế kỉ 20.

SỰ XUẤT HIỆN CỦA TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGHIÊN CỨU Ở ĐỨC

Tuy nhiên, chính hoàn cảnh dẫn đến cuộc cách mạng đã đóng vai trò quan trọng trong sự hình thành của một

trong những vinh quang của thế kỉ 19: hệ thống các trường đại học nghiên cứu của Đức. Đây là mô hình giáo dục có hiệu quả nhất trong việc sáng tạo và truyền tải kiến thức đã từng xuất hiện trong lịch sử loài người. Bằng việc nuôi dưỡng nhân tài và tạo môi trường cho nhiều cá nhân có tài năng như Riemann phát triển, các trường đại học nghiên cứu này đã đưa nước Đức nổi lên trở thành lực lượng đứng đầu thế giới về khoa học và toán học cuối thế kỉ 19 và đầu thế kỉ 20.

Ngày nay, chúng ta mặc nhiên công nhận vai trò của các trường đại học trong công cuộc tạo lập tri thức. Nhưng 150 năm trước, vai trò này chẳng rõ ràng chút nào. Trong thế kỉ 18, khoa học và toán học được giảng dạy chủ yếu ở các học viện quốc gia hoặc địa phương do giới quý tộc tại đó bảo trợ. Trên hầu hết các vùng đất châu Âu, sự bảo trợ như vậy rất hạn chế. Ví dụ, tại Anh, ủng hộ tài chính từ hoàng gia cho Hội Khoa học Hoàng gia hầu như không đáng kể, và toán học phần lớn dành riêng cho những người đam mê nghiệp dư có năng khiếu - nhiều người trong số đó có vị trí trong trường đại học mà tại đó nghiên cứu không phải là một phần của yêu cầu công việc. Hỗ trợ từ hoàng gia cho Viện Hàn lâm Phổ thì nhiều hơn, và viện hàn lâm này là trung tâm của khoa học và toán học trong thế kỉ 18 ở Đức, mặc dù các trường đại học - đặc biệt là những trường mới như Göttingen - mới là những trung tâm nắm giữ vị trí tiên phong trong một vài môn khoa học. Các học viện nghiên cứu của Pháp tập trung chủ yếu ở Paris[70] và được hỗ trợ một cách tương

[70] Cách mạng và Napoleon đã tập trung hóa hơn nữa giáo dục và

đối về mặt tài chính. Cách mạng Pháp đã có tác dụng tốt đối với nền khoa học Pháp. Thần học bị đẩy ra ngoài. Khoa học lên ngôi thống trị. Và toán học là nữ hoàng của các môn khoa học. Đầu thế kỉ 19, Paris là trung tâm trí tuệ của thế giới. Các trường đại học Pháp luôn đứng cao hơn các trường đại học của nước khác trong công việc giảng dạy, và thậm chí còn cao hơn nữa ở các môn lí luận và nhân văn.

Bất kì ai có lí trí đều không thể dự đoán rằng trong những năm đầu 1800, Berlin hoặc bất cứ nơi nào khác ở Đức, sẽ sớm cạnh tranh với Paris trong vai trò là trung tâm khoa học và toán học. Đức đi sau Anh, Pháp, và Tây Ban Nha trong hầu hết mọi lĩnh vực. Đức chậm trễ trong việc thống nhất đất nước, chậm trễ công nghiệp hóa, chậm trễ đô thị hóa. Chiến thắng trước Phổ của Napoleon tại Jena năm 1806 dường như báo hiệu rằng thế kỉ mới có khả năng thuộc về Pháp. Hội nghị Vienna củng cố sự chia cắt, đảm bảo rằng các tiểu bang Đức sẽ không sáp nhập, và rằng những điều kiện xã hội và kinh tế cũ sẽ tiếp tục áp đặt.

Tuy nhiên, nghịch lí thay, sự chia cắt, sự cạnh tranh giữa các tiểu bang và sự tương đối lạc hậu của nền kinh tế nước Đức đã tạo ra động lực cho các trường đại học vươn lên lớn mạnh. Vua chúa địa phương tự hào về các trường đại học của họ, và hỗ trợ cho chúng một cách nhiều nhất trong khả năng có thể. Các giáo sư toàn năng không nhiều, và thường được tiến cử bởi các giáo sư toàn năng

---

quản lí ở Paris. Nhưng ngay cả nếu muốn thì người Pháp cũng không thể phân tán thứ gì được.

khác. Các trường đại học giành giật những giáo sư giỏi và quan trọng nhất, do vậy các cá nhân được bổ nhiệm dựa trên cơ sở thành tựu của họ. Thông lệ thuê giáo sư giỏi từ trường khác tạo cơ hội cho hợp đồng của họ được đàm phán lại và đem lại thế mạnh cho từng giáo sư trong khi thương thảo các điều kiện làm việc. Nhờ vậy, Gauss đã yêu cầu Göttingen lập một đài thiên văn dành riêng cho ông. Hơn nữa, điều kiện xã hội đã cho phép sự nghiệp học tập trở thành một phương tiện thăng tiến cho thanh niên Đức. Do nhu cầu và sự cạnh tranh cao của sự nghiệp học thuật, các giáo sư đang tiến hành các nghiên cứu mang tính chất mũi nhọn có nhiều cơ hội hơn trong việc thu hút sinh viên giỏi. Điều này càng đem lại danh tiếng cho trường đại học, và rồi danh tiếng đó lại thu hút nhiều giáo sư giỏi. Và cứ tiếp tục như vậy.

Theo kinh nghiệm của nước Đức ở thế kỉ 19, sự đi đôi của tuổi trẻ và kinh nghiệm, nghiên cứu và giảng dạy, đã làm cho các trường đại học trở thành các trung tâm nghiên cứu khoa học một cách rất tự nhiên và đầy thú vị. Nhà toán học và triết học Alfred North Whitehead đã có nhận xét rất xác đáng khi viết, "Ý nghĩa xác thực của một trường đại học nằm ở chỗ nó phải đảm bảo sự liên kết giữa kiến thức và niềm say mê của cuộc sống, bằng cách đem thanh niên và người cao tuổi lại gần nhau trong một thế giới tưởng tượng của việc học... Bi kịch của thế giới là người giàu trí tưởng tượng thì lại ít kinh nghiệm, và những người có kinh nghiệm thì lại có trí tưởng tượng yếu ớt. Kẻ ngu muội hành động theo trí tưởng tượng mà không có kiến thức; người thông thái giả tạo thì hành

động theo kiến thức nhưng không có trí tưởng tượng. Nhiệm vụ của trường đại học là hòa quyện trí tưởng tượng và kinh nghiệm với nhau."[71] Không phải ngẫu nhiên khi mà đóng góp mang tính quyết định trong các ngành khoa học và toán học thường được thực hiện bởi những người trẻ tuổi. Những lĩnh vực như vậy thường phát triển dựa trên những thách thức hơn là vào sự thu nạp trí khôn. Trong khi ở Đức, người ta có thể được bổ nhiệm làm giáo sư ở độ tuổi tương đối trẻ thì các vị trí tốt nhất tại Pháp nằm ở Viện Hàn lâm Khoa học Quốc gia hay College de France[72]. Cách mạng Pháp đã kích thích sự phát triển của khoa học bằng cách bổ nhiệm nhiều vị trí trong những tổ chức này, qua đó tạo điều kiện cho các cá nhân trẻ. Tuy nhiên, các sự bổ nhiệm thường là trọn đời, và, khi thế kỉ 19 đi qua, những vị trí ở các học viện như vậy thường đến tay các nhà khoa học hay toán học sau những năm mà khả năng tưởng tượng của họ là tốt nhất đã trôi qua - những năm đó, họ cực nhọc lo việc cải thiện vị trí việc làm và dành ít thời gian cho nghiên cứu.

Tất nhiên, sự cạnh tranh giữa các tổ chức giáo dục đào tạo (và giữa các hoàng gia hỗ trợ họ) không phải là nguyên nhân chính làm dày lên các trường đại học

---

[71] A. N. Whitehead, "Universities and Their Function", trong *The Aims of Education and Other Essays* (New York: Macmillan, 1967), 93

[72] Một học viện nghiên cứu khoa học đặc biệt của Paris, Pháp. Học viện có nhiều khoa khác nhau liên quan đến khoa học tự nhiên, khoa học xã hội và nhân văn. Hằng năm, học viện tổ chức nhiều khóa học khác nhau miễn phí dành cho mọi người. Ngày nay, các khóa học này cũng được ghi hình và đưa lên trang mạng của học viện. www.college-de-france.fr.

nghiên cứu. Thắng lợi của Pháp dưới quyền Napoleon năm 1806 cũng gián tiếp góp phần. Nó gây ra rất nhiều sự tự vấn lương tâm ở khắp các tiểu bang của Đức, và tạo điều kiện cho một số cá nhân nằm ngoài hệ thống trường đại học đóng góp vai trò trong việc nâng cao chất lượng. Hai trong số đó là anh em von Humboldt. Wilhelm (1767-1835) là Bộ trưởng Bộ Giáo dục Phổ từ năm 1809, giám sát sự phát triển một hệ thống nhằm cung cấp một nền giáo dục tốt đẹp cho mọi tầng lớp xã hội. Đại học Berlin mở cửa năm 1810 với mục đích rõ ràng là trở thành trường đại học tốt nhất trên thế giới. Alexander (1769-1859), một học giả, dành phần thừa kế giàu có của mình cho một chuyến đi kéo dài nhiều năm nhằm khám phá các vùng Amazon. Được đào tạo như một nhà địa chất, ông làm việc trong nhiều năm để biên soạn cuốn sách đồ sộ mô tả chuyến khám phá của ông. Ông trao đổi thư từ thường xuyên với nhiều nhà khoa học hàng đầu thời đó. Khi ở Mĩ, ông đã tới thăm Thomas Jefferson, lúc đó đang trong nhiệm kì tổng thống thứ hai của mình.

Cả hai anh em von Humboldt đều yêu thích đời sống trí thức tại Paris, và quyết tâm tạo ra một bầu không khí tương tự tại Berlin. Alexander đặc biệt đánh giá cao toán học, ông có công hỗ trợ về mặt tinh thần và tài chính cho một số nhà toán học trẻ tuổi ở Berlin. Đại học Berlin đã rất nỗ lực để thu hút Gauss ra khỏi Göttingen trong thập kỉ 1820, nhưng Gottingen đã đánh bạt lời mời đó và cố giữ ông ở lại. Tuy nhiên, một khoa toán đầy sinh khí đã được thành lập trong những năm 1830 tại Đại học Berlin. Alexander đã tốn nhiều công sức để vận động đưa

Lejeune Dirichlet về Đại học Berlin. Sự bổ nhiệm này gây tranh cãi nhưng sáng suốt, Dirichlet thực sự đem lại sức hút trí tuệ cho Berlin và có ảnh hưởng một cách đặc biệt đến Riemann.

Một cá nhân khác nằm ngoài hệ thống các trường đại học và cũng đã có đóng góp mang tính chất quyết định cho nền toán học Đức là một công chức dân sự Phổ tên August Crelle. Là một kĩ sư dân dụng, ông rất thích toán học và đã thành lập một tạp chí toán học hàng đầu trên thế giới tại thời điểm đó: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.[73] Mặc dù mang tên đó, tạp chí này hầu như chỉ dành chỗ cho toán học cơ bản, và vẫn tồn tại đến ngày nay. Hiện nay cũng như lúc đó, nó được biết với tên gọi *Tạp chí của Crelle* (Crelle's journal). Crelle gần như không bao giờ sai lầm trong việc phát hiện ra các tài năng toán học, ông đã cho xuất bản rất nhiều công trình ngày nay trở nên nổi tiếng của các nhà toán học trẻ tuổi nhưng chưa được biết đến thời đó. Cũng giống như Alexander von Humboldt, ông quen biết, khuyến khích, và giúp đỡ nhiều người trong số họ.

Đến giữa thế kỉ 19, các trường đại học Đức không có đối thủ nếu xét về chiều sâu và chất lượng của toán học và khoa học. Cũng giống như các trường đại học thời Trung cổ trước đây, các trung tâm nghiên cứu này ra đời một cách tự phát trong một môi trường đặc biệt thuận lợi. Đây là những tổ chức hình mẫu cho các

[73] Tựa đề của nó được dịch thành *Tạp chí toán học cơ bản và ứng dụng* (Journal for Pure and Applied Mathematics).

trường đại học lớn của ngày nay, và đóng vai trò then chốt trong sự bùng nổ của toán học và khoa học - đã tiếp nhiên liệu cho thời đại chúng ta. Nhưng trường đại học này đem lại sự tự do cho sinh viên, sở hữu đội ngũ các giáo sư biết cách ươm mầm tài năng, đặc biệt đào tạo tận tâm ngay cả đối với một người có xu hướng sống nội tâm như Riemann. Khi trở về từ Berlin năm 1849, ông nghiên cứu vật lí và triết học, và hoàn thành chương trình tiến sĩ năm 1851 dưới sự hướng dẫn của Gauss. Luận án của ông phi thường xét ở mọi khía cạnh. Riemann sử dụng một nguyên lí mà ông xem là mình học được từ Dirichlet để tạo ra những bước tiến rất lớn trong một lĩnh vực mới gọi là giải tích phức. Lĩnh vực này là kết quả của việc áp dụng các phương pháp giải tích đối với số phức - các số thu được bằng cách cộng thêm vào số thực căn bậc hai của một số âm.[74] Gauss ca ngợi tính độc đáo của luận án Riemann trong bản báo cáo của mình và tìm đủ mọi cách để Riemann ở lại Göttingen sau khi bảo vệ luận án.

---

[74] Kí hiệu số sử dụng ngày nay có một lịch sử riêng rất dài mà chúng ta không bàn tới ở đây. Bạn có thể xem *số thực* là một số âm, bằng không hay một số dương có thể viết bằng một số thập phân (có thể là vô số): đó là một số nguyên cộng với một số từ 0 đến 1 với khả năng mở rộng đến vô số số sau dấu phẩy. Số 10.88901, π=3.141592...,-1.4142...(= $-\sqrt{2}$), 1000, 0 và -317.2 là số thực. Số phức được tạo ra bằng cách thêm vào số thực căn bậc hai của một số âm. Các số phức có thể được viết dưới dạng $a+ib$ trong đó $i^2=-1$ và a, b là các số thực.

BẰNG HABILITATION

Tại Đức, cũng như các nước khác, quá trình học tập cũng giống với những gì mà Đại học Paris thừa hưởng từ thời Trung cổ. Một sinh viên đầu tiên sẽ làm tiến sĩ, bằng này cho phép anh ta (có rất ít phụ nữ - do tục lệ xã hội và định kiến công khai khiến họ rất khó khăn theo đuổi nền giáo dục đại học) trợ giảng trong các khóa học. Nghiên cứu sinh sau khi tốt nghiệp sẽ tiếp tục nghiên cứu luận án cao hơn luận án tiến sĩ, công bố kết quả qua một bài viết (*Habilitationschift*, hoặc luận án Habilitation), và trình bày một bài thuyết trình nhậm chức trước công chúng (bài thuyết trình Habilitation). Cả hai tác phẩm - bài viết và bài thuyết trình được đánh giá bởi một hội đồng các giáo sư. Sau khi nghiên cứu sinh qua được kì sát hạch Habilitation, anh ta có thể được bổ nhiệm vào các trường đại học như là một giáo sư đặc biệt, gần giống với chức vị trợ lí giáo sư ở trường đại học Mĩ ngày nay. Lương rất thấp. Các vị giáo sư đặc biệt mới được bổ nhiệm này có quyền được đưa ra các giáo án của mình ở trường đại học, và có thể nhận được một phần từ số tiền học phí mà các sinh viên trả để theo học các khóa học của họ. Nếu khóa học thu hút một số lượng đủ nhiều các sinh viên, số tiền đó cũng đủ để sống. Tất nhiên, sự đảm bảo và một thu nhập cao hơn chỉ đến khi họ được bổ nhiệm vào một trong rất ít các vị trí giáo sư thường nhiệm (professor ordinarius). Khi đó, tiền lương cho một vị trí như vậy sẽ được bảo đảm và thanh toán bởi chính quyền bang.

Để chuẩn bị cho bài thuyết trình nhậm chức của mình, Riemann đưa ra ba chủ đề mà ông dự định sẽ dùng để phát biểu sau này với khoa. Ông đã thực hiện một công trình mang tính đột phá liên quan đến chủ đề đầu tiên, chủ đề thứ hai thuộc về phạm vi mà ông là một chuyên gia, và chủ đề thứ ba là *Uber Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen* (Về những nền tảng nâng đỡ hình học). Riemann đã từng không nghiên cứu bất cứ điều gì liên quan đến hình học, mặc dù ông hẳn đã phải tư duy về chủ đề này trong một khoảng thời gian nào đó. Quyền lựa chọn chủ đề lại rơi vào người hướng dẫn, tức là Gauss, và trong thực tế, người hướng dẫn thường chọn chủ đề mà ứng cử viên cảm thấy thoải mái nhất. Tuy nhiên, Gauss đã chọn chủ đề thứ ba, chủ đề mà Riemann đã dành thời gian nghiên cứu ít nhất. Người bạn và đồng nghiệp của Riemann là Dedekind viết rằng Gauss đã phá vỡ mọi truyền thống và lựa chọn chủ đề thứ ba "bởi vì ông thích thú muốn biết chàng trai trẻ kia sẽ xử lí một chủ đề quá khó như vậy bằng cách nào."[75]

Chi tiết về mối quan hệ giữa Gauss và Riemann bị mai một theo thời gian, vì vậy không có cách nào để biết lí do của Gauss đằng sau sự lựa chọn chủ đề. Bởi vì họ công tác cùng một chỗ, không có bức thư viết tay nào giữa họ lưu lại việc trao đổi các ý tưởng. Chỗ trống này được lấp đầy bằng đủ mọi suy luận, trong đó có một suy

[75] R. Dedekind, "Bernhard Riemann's Lebenslauf" trong H. Weber, biên tập, *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschlaftlicher Nachlass*, 2nd ed. (Leipzig: Teubner, 1892), 553.

luận cho rằng Gauss không hoàn toàn đánh giá cao khả năng của Riemann. Điều này có vẻ như không đúng, vì có bằng chứng viết tay cho thấy Gauss rất ngưỡng mộ luận án của Riemann và đã cố giữ ông ở lại Göttingen. Về phần mình, Riemann biết rất rõ công việc của Gauss. Thậm chí nếu Gauss và Riemann đã không trao đổi về hình học, thì Riemann cũng chắc chắn có thể đoán ra mối quan tâm của người thầy hướng dẫn về các nền tảng cơ sở của hình học thông qua các công trình của Gauss về bề mặt trong không gian ba chiều và bài điểm sách của ông. Hơn thế nữa, Riemann rất thân cận với Wilhelm Weber, nhà vật lí tài năng và là con rể của Gauss. Là một trong bảy giáo sư của Göttingen bị sa thải bởi vị công tước phản động, Weber được phục chức trong cuộc cách mạng năm 1848. Gauss rất tin tưởng Weber và luôn thông tin cho Weber về công việc của mình về tiên đề song song và hình học Phi-Euclid.

Nhìn chung, thật khó có thể chấp nhận giả thuyết rằng Riemann lại không nhận ra việc đưa ra một bài thuyết trình về nền tảng của hình học là không thể cưỡng lại đối với Gauss. Nhưng điều này không ngăn cản ông cảm thấy hối tiếc vì đã liệt kê hình học là một trong ba chủ đề tiềm năng. "Con ngày càng tin rằng Gauss đã nghiên cứu chủ đề này trong nhiều năm qua, và đã bàn về nó với một số người bạn (Weber là một trong những người đó)", Riemann viết cho cha. Về phần Gauss, ông không đến nỗi quá ấu trĩ khi chọn chủ đề này nếu ông không nghĩ rằng Riemann sẽ có một cái gì đó thú vị để trình bày về nó.

Dù gì đi nữa, chúng ta cũng phải cảm ơn Gauss đã bắt buộc bài thuyết trình phải diễn ra. Bài thuyết trình của Riemann - vì vậy rõ ràng là hướng đến riêng Gauss - bắt đầu bằng kết quả của người thầy vĩ đại và từ đó biến đổi hoàn toàn những kết quả đó.

RIEMANN ĐÃ NÓI GÌ

Đầu tiên Riemann phân biệt khái niệm không gian với hình học: hình học được xem như là một cấu trúc phụ nằm trong không gian. Ông định nghĩa một không gian là một tập hợp các điểm, và một đa tạp là một loại không gian đặc biệt bao gồm các khu vực mà các điểm của chúng có thể được đặt tên bằng một tập hợp các số.

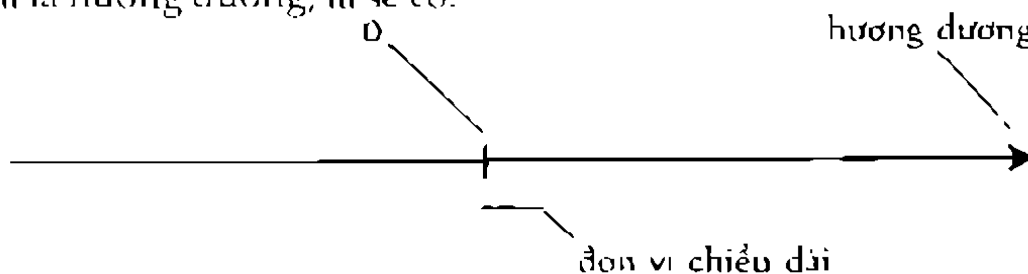
Đa tạp đơn giản nhất, thường ký hiệu là **R**, là trục số, - nghĩa là, chúng ta tưởng tượng về các số thực một cách hình học bằng cách nghĩ về chúng như các số tương ứng với các điểm trên một trục đường thẳng. Để làm điều này, hãy vẽ một đường thẳng mà chúng ta tưởng tượng rằng chúng kéo dài mãi mãi ra cả hai phía. Ta chọn một điểm, gán điểm đó với số không, chọn một đơn vị chiều dài (ví dụ, một cm, một inch, một sải, một năm ánh sáng...), và chọn một hướng từ số không (tổng cộng chỉ có hai hướng) mà ta quy định là hướng dương. Đối với mỗi số thực dương, chúng ta gán nó vào điểm nằm trên phần dương của trục số và cách xa số không một khoảng cách bằng đúng số lượng đơn vị chiều dài tương ứng với độ lớn của nó. Đối với mỗi số âm, chúng ta gán nó vào điểm

nằm trên phần âm của trục số, bên tay trái cách xa số không một khoảng cách bằng đúng số lượng đơn vị chiều dài tương ứng với độ lớn của nó.[7]"

Đa tạp đơn giản nhất kế tiếp là mặt phẳng $\mathbf{R}^2$, mà chúng ta có thể nghĩ nó tương ứng với những cặp số thực. Để làm điều này, hãy tưởng tượng các trang của cuốn sách này kéo dài vô tận lên trên và xuống dưới, qua phải và qua trái. Chọn hai trục số khác biệt cắt nhau tại điểm tương ứng với số không của mỗi trục. Cách quen

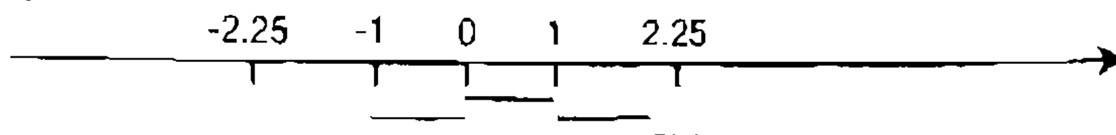
---

[7]" Ví dụ, vẽ một phần của đường thẳng như vậy, chọn một điểm ở giữa làm số không, lấy centimet làm đơn vị chiều dài và hướng bên phải là hướng dương, ta sẽ có:



Hình c. Điểm 0, đơn vị độ dài và hướng dương.

Để xác định số 1, ta chọn điểm cách điểm 0 đúng 1 centimet về phía phải. Để xác định số 2.25, ta chọn điểm cách điểm 0 đúng 2.25 centimet về phía phải. Để xác định các số âm, ta chọn điểm cách điểm 0 về bên trái: -1 ứng với điểm cách điểm 0 đúng 1 centimet về bên trái, -2.25 cách điểm 0 2.25 đơn vị về bên trái, và cứ tiếp tục như vậy.



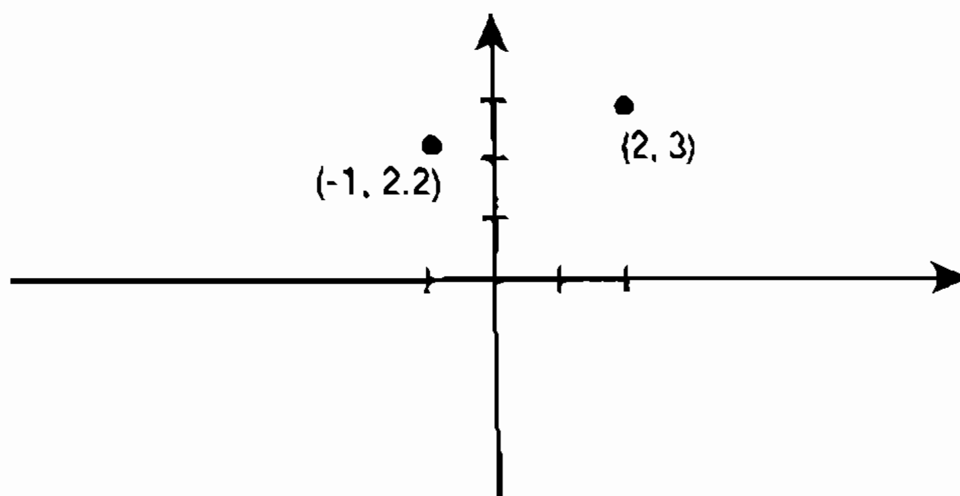
Hình d. Trục số.

Còn số 100.000 thì sao? Số đó không nằm trên trang giấy này nhưng vẫn nằm trên trục số, cách chúng ta 100.000 centimet về bên phải.

thuộc là vẽ trục đầu tiên nằm ngang với hướng dương nằm ở bên phải, trục thứ hai đứng thẳng với chiều dương hướng lên trên. Đây chỉ là quy ước, ta có thể chọn các cách khác nhau để định hướng cho các trục số. Tuy nhiên, điều quan trọng là một khi đã chọn xong những trục số này, chúng ta liên kết từng cặp số với một điểm trên mặt phẳng, bằng cách xem con số đầu tiên trong cặp số đó là khoảng cách song song với trục thứ nhất, hướng được quy định bởi dấu âm dương và số thứ hai trong cặp số đó là khoảng cách song song với trục thứ hai.[77]

---

[77] Vì vậy, cặp số (2, 3) tương ứng với điểm trên mặt phẳng có hai đơn vị độ dài trên trục thứ nhất về hướng dương và 3 đơn vị trên trục thứ hai. Cặp (-1, 2.2) tương ứng với điểm có 1 đơn vị độ dài trên trục thứ nhất về phía trái và 2.2 đơn vị song song với trục thứ hai về hướng dương.

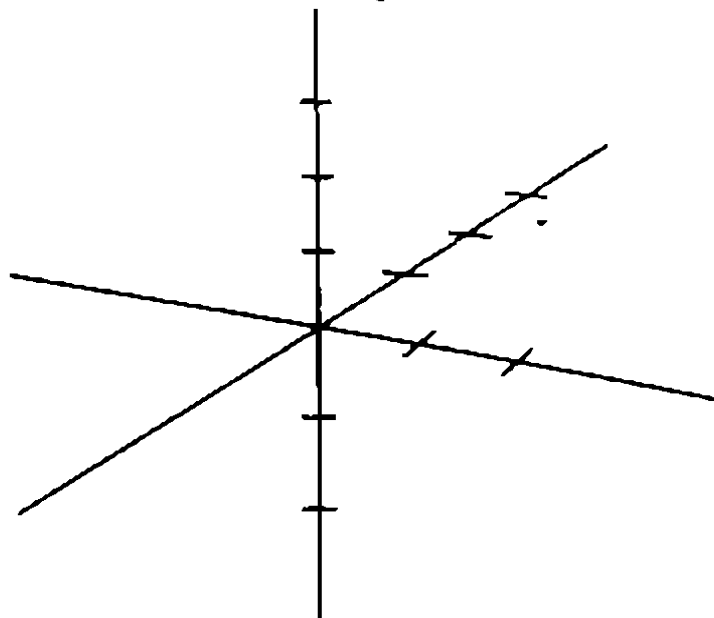


Hình e. Mặt phẳng dưới dạng các cặp số.

Nhân đây, nên chú ý rằng thứ tự các số trong cặp số rất quan trọng: Ta cố ý chọn (2,3) và (3,2) là các điểm khác nhau. Và chúng đúng thật là khác nhau. Nếu bạn chọn các trục theo các hướng khác nhau, bạn vẫn có thể liên kết một cặp số với một điểm trên trang giấy. Với bất kì cách nào đi nữa, cũng có sự tương ứng giữa các cặp số và các điểm trên một trang giấy kéo dài đến vô tận về mọi hướng từ trang giấy.

Không gian ba chiều $\mathbf{R}^3$ là tập hợp trong đó các điểm là các bộ ba số thực (cũng giống như $\mathbf{R}^2$, thứ tự là rất quan trọng). Trước tiên, chúng ta hãy hình dung không gian này một cách hình học bằng cách chọn ra ba trục số cùng giao nhau tại mốc số không của mỗi trục và không có trục nào nằm trên mặt phẳng tạo bởi hai trục kia. Ta không thể vẽ không gian này trên một tờ giấy (vì nếu như vậy thì cả ba trục sẽ nằm trên cùng một mặt phẳng của tờ giấy), nhưng chúng ta có thể vẽ hai trục trên mặt phẳng của tờ giấy, và tưởng tượng trục thứ ba đâm ra khỏi tờ giấy từ giao điểm của hai trục kia và vuông góc với cả hai.[78] Ví dụ, chúng ta tưởng tượng về bộ ba số (2, 3, -1) như là nó tương ứng với điểm có hai đơn vị độ dài về hướng dương của trục số đầu tiên, ba đơn vị theo hướng

[78] Theo cách truyền thống, người ta tưởng tượng ba trục này được bóp lại ở đâu một ít với ánh sáng đậm ở đằng sau và vẽ bóng của chúng xuống mặt phẳng như trong Hình f.

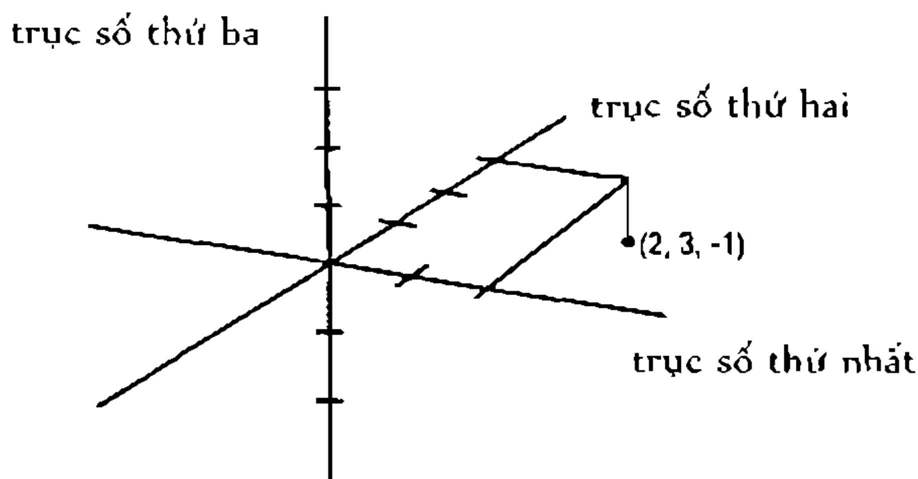


Hình f. Biểu diễn bộ ba số thực.

dương của trục số thứ hai, và một đơn vị theo hướng âm của trục số thứ ba.[79] Bộ ba số (2.5, -1, 3) tương ứng với một điểm khác có 2.5 đơn vị độ dài về hướng dương của trục số thứ nhất, 1 đơn vị độ dài theo hướng âm của trục số thứ hai, và 3 đơn vị độ dài theo hướng dương của trục số thứ ba. Ta tưởng tượng không gian ba chiều kéo dài đến vô tận về mọi hướng, mỗi bộ ba số được gán với chính xác một điểm.

Riemann không dừng lại với các con số, các cặp số, và các bộ ba số. Nếu *n* là một số nguyên dương bất kì, ta có thể liên tưởng đến một tập hợp các *bộ-n-số-thực-có-thứ-tự* như là một không gian - gọi là không gian-thực-*n*-chiều và kí hiệu là $\mathbf{R}^n$. Mỗi "điểm" của nó là một *bộ-n-số-thực* và nó có *n-chiều* bởi vì nó cần *n* số để xác định bất kì một điểm nào. Chúng ta không thể có hơn ba hướng độc lập trong không-gian-ba-chiều, bởi vì, ví dụ như nếu chúng ta bố trí một trục thứ tư trong không gian ba chiều, thì các điểm trên trục thứ tư có thể được mô tả bằng bộ ba số

[79] Với quy ước như trên, ta có thể vẽ bộ ba số (2,3, 1) như Hình g.



Hình g Hình vẽ bộ ba số thực.

biểu diễn vị trí của nó đối với ba trục đầu tiên. Mặc dù chúng ta không thể thực sự vẽ được một bức tranh của không-gian-*n*-chiều nếu *n* lớn hơn 3, nhưng điều này chẳng có gì kì lạ hoặc không tưởng. Ví dụ, nếu *n* là 5, thì không-gian-năm-chiều chỉ là tập hợp của các bộ năm số thực. Chúng ta đều đã biết thế nào là các số thực, và một bộ-năm chỉ là một tập hợp có thứ tự của năm số mà thôi. Vậy thì đâu là vấn đề nếu chúng ta không thể vẽ nó? Một đa-tạp-*n*-chiều là một tập hợp mà trong đó tập hợp các điểm ở lân cận một điểm bất kì giống như (nghĩa là, đồng phôi với) một khu vực của không gian-*n*-chiều. Cũng giống với trường hợp mà *n* bằng 2 hay 3, đối với *n* bất kì, đa tạp *n* chiều đơn giản nhất là không-gian-thực-*n*-chiều và có vô số các đa tạp-*n*-chiều khác nó. Riemann thậm chí còn chấp nhận các đa tạp có số chiều là vô hạn.

Euclid đã xây dựng dạng hình học mang tên ông dựa trên một số thuật ngữ mà ông tự đưa ra để mô tả chúng, nhưng những mô tả đó thực chất không định nghĩa được: điểm, đường thẳng, mặt phẳng. Đúng vậy, ta có thể liên tưởng một điểm như một con số, các điểm trên một đường thẳng như là tương ứng một-một với các số thực, hay các điểm của một mặt phẳng là tương ứng một-một với các cặp số. Nhưng để hiểu được lí thuyết của Euclid ta còn phải cụ thể hơn nữa. Riemann lập luận rằng khoảng cách là một khái niệm còn cơ bản hơn các khái niệm ban đầu mà Euclid đã đưa ra và phải được xác định rõ một cách độc lập. Riemann là một người thầy vĩ đại về giải tích, và phương pháp mà ông đề xuất để xác định khoảng cách trong đa tạp là rất thú vị và đem lại nhiều lợi

ích cũng như các ý tưởng khác của ông.[80] Ông quan sát thấy rằng một khi ta đã tìm ra cách để đo tốc độ dọc theo bất kì quỹ đạo nào trong một đa tạp, phép tính vi tích phân sẽ tự động cho ta cách đo độ dài của đường cong trong đa tạp đó, đại số (và lượng giác) tự động cho ta cách đo góc.[81] Chúng ta sử dụng từ *mêtric* để chỉ đến phương

---

[80] *Giải tích* (analysis) là một nhánh của toán học với các đối tượng của tính toán là hàm số, giới hạn, đạo hàm, và những gì sẽ xảy ra khi sự vật trở nên cực kì nhỏ hoặc cực kì lớn. Bạn có thể nghĩ hàm số giống như một cỗ máy liên kết các phần tử của một tập hợp với các phần tử của tập hợp khác. *Vi tích phân* (Calculus) nghiên cứu hàm số thay đổi như thế nào và cung cấp các công cụ xác định tốc độ thay đổi của một hàm số tại một số phần tử của tập hợp (*vi phân* (differentiation)) và ngược lại, xác định một hàm số dựa vào tốc độ thay đổi cho trước của nó tại mỗi phần tử trong tập hợp (*tích phân* (integration)). Mặc dù ý tưởng cơ bản thì đơn giản, chi tiết có thể rất phức tạp. Ta phải rất thận trọng khi xác định tốc độ thay đổi (được gọi là *đạo hàm* (derivative)) của một hàm số. Đây lại là một đối tượng toán học khác, thường là một hàm số trong một không gian khác, nên phải cực kì cẩn thận, đặc biệt là trong các không gian phức. Toàn bộ khoa học đầu tiên của vi tích phân nghiên cứu các loại hàm số đặc biệt liên kết số thực với số thực (nghĩa là, các hàm số từ **R**, hoặc vài khoảng trong **R** đến **R**). Đạo hàm (tốc độ thay đổi) của một hàm số bất kì tại một số thực là một con số.

[81] Đối với độc giả còn nhớ một ít vi tích phân, bạn có thể xem một hàm số trong **R** đến một đa tạp như một đường trong đa tạp: tưởng tượng các số thực là thời gian, và giá trị của hàm số ở từng thời điểm là vị trí tại thời điểm đó. Nếu đa tạp có *n* chiều, đạo hàm của một hàm tại bất kì thời điểm nào là một *bộ-n-phần tử (n-tuples)*. Các nhà toán học phân biệt giữa *bộ-n-phần tử* đại diện cho đạo hàm và *bộ-n-phần tử* đại diện cho các vị trí trong đa tạp. Bộ đầu tiên được gọi là *vectơ (hay vectơ tiếp tuyến)* và bộ sau được gọi là *điểm*. Ta có thể tưởng tượng tập hợp tất cả các vectơ tại một điểm trên đa tạp như một tập hợp tất cả vận tốc của các đường cong đi qua điểm đó. Tập hợp các vectơ tại một điểm trên đa-tạp-n-chiều là tương ứng một-một với $\mathbf{R}^n$,

pháp đo tốc độ dọc theo các đường cong, hoặc đo khoảng cách giữa hai điểm. Với Riemann, cả hai điều này đều như nhau.

Hơn nữa, chúng ta định nghĩa *đường thẳng* là quỹ đạo có khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm. Đường này được gọi là đường trắc địa *(geodesic)*. Đối với những người sống trong một không gian nào đó, những đường trắc địa của không gian này trông có vẻ thẳng. Và một khi có khái niệm như vậy về đường thẳng, chúng ta có thể định nghĩa tam giác như là những hình ảnh giới hạn bởi ba đoạn trắc địa. Và một khi chúng ta có các tam giác, ta có thể định nghĩa *độ cong* (curvature). Trong một đa tạp hai chiều, độ cong ở một điểm chỉ là số đo độ chênh lệch của tổng các góc trong một tam giác có đỉnh tại điểm đó so với 180 độ. Chính xác hơn, đó là độ chênh lệch so với 180 độ khi mà bề mặt của tam giác co lại. Độ cong dương có nghĩa là tam giác có tổng các góc lớn hơn 180 độ, độ cong âm nghĩa là tam giác có tổng các góc nhỏ hơn 180 độ, và độ cong bằng không là khi tam giác có tổng các góc chính xác bằng 180 độ.

---

vì vậy có thể xem mỗi điểm trên đa-tạp-*n*-chiều mà có một không gian các vectơ vận tốc liên kết với nó là một bản sao của **R**ⁿ. Đây được gọi là *không gian tiếp xúc* (tangent space) với đa tạp tại một điểm cho trước, và chỉ là tập hợp của tất cả vận tốc có thể có, hay đạo hàm của đường cong bất kì nào đi qua điểm đó. Để xác định một mêtric, bạn phải xác định được chiều dài của mỗi vectơ vận tốc (mà chúng ta xem giống như tốc độ) tại từng điểm. Riemann đã chọn một lớp các mêtric cực kì thú vị, bằng cách tự giới hạn mình trong một lớp các hàm số trên không gian tiếp xúc với đa tạp tại từng điểm đủ vừa để xử lí nhưng cũng đủ bao quát để nắm bắt được một loạt các hiện tượng thú vị về mặt toán học

Trong một đa tạp có số chiều lớn hơn hai, ta có nhiều mặt phẳng hai chiều khác nhau đi qua một điểm. Và chúng ta có các độ cong khác nhau của các tam giác trắc địa khác nhau tiếp xúc với các mặt phẳng tiếp tuyến khác nhau tại điểm đó. Độ cong không phải là một số, mà là tất cả tập hợp này, mỗi một số tương ứng với một cặp hướng tại một điểm (Mỗi cặp hướng xác định một mặt phẳng trong không gian được tạo bởi tất cả các hướng, và mặt phẳng này lại tiếp tục xác định một bề mặt hai chiều được tạo ra bởi các đường trắc địa tiếp xúc với các hướng của mặt phẳng đó.). Công cụ toán học dùng để lần dò ra các độ cong khác nhau theo các hướng khác nhau gọi là ten-xơ độ cong Riemann (Riemann curvature tensor).

Trong cuốn sách nhỏ của ông về hình học vi phân trên các bề mặt, Gauss đã định nghĩa độ cong của một bề mặt trong không gian ba chiều bằng cách sử dụng những thuộc tính của các đường vuông góc với bề mặt đó. Định nghĩa của ông sẽ trở nên vô nghĩa trong các trường hợp khác, bởi vì để xác định một đường vuông góc với một bề mặt tại một điểm, tất cả cần phải nằm trong không gian ba chiều. Sau đó ông dành nhiều trang tính toán để cho thấy rằng thực sự độ cong có thể được xác định bởi một người nào đó sống trên bề mặt mà không cần phải có khả năng nhảy ra khỏi bề mặt đó để vẽ các đường vuông góc. Trong một nỗ lực mãnh liệt và táo bạo, thay vào đó, Riemann đã định nghĩa độ cong bằng tính chất mà Gauss cố gắng chứng minh. Ông định nghĩa rằng một không gian là *phẳng*, nếu và chỉ nếu mọi tam giác trong không gian đó có tổng các góc bằng 180 độ. Đây là trường hợp mà trong đó khi độ cong trong mọi mặt phẳng tạo bởi các

hướng đều bằng không. Một không gian, do đó, là phẳng nếu và chỉ nếu nó có các tính chất trong **gói Euclide**. Nghĩa là, khi và chỉ khi định lí Pythagoras có giá trị; hay nói cách khác, khi và chỉ khi định đề thứ 5 là đúng. Riemann đã thâu tóm toàn bộ ba thiên niên kỉ hình học vào trong chỉ một định nghĩa!

Để lấy một ví dụ cụ thể, chúng ta vừa mới định nghĩa không gian hai chiều $\mathbf{R}^2$ là tập hợp các cặp *(x, y)* của các số thực. Nó trở thành *không gian Euclid hai chiều* nếu chúng ta *định nghĩa* khoảng cách thông qua định lí Pythagoras. Trong trường hợp này, đôi khi chúng ta thậm chí còn sử dụng một kí hiệu riêng $\mathbf{E}^2$ để làm rõ rằng chúng ta không chỉ có một không gian hai chiều, mà cụ thể hơn là không gian hai chiều có khoảng cách đặc biệt. Tương tự, ta định nghĩa *không gian Euclid ba chiều* $\mathbf{E}^3$ là không gian ba chiều có khoảng cách được xác định bởi định lí Pythagoras.[82] Sau đó ta có thể chỉ ra rằng một đường cong trong không gian Euclid hai hay ba chiều là một đường trắc địa nếu và chỉ nếu nó là một đường thẳng theo nghĩa thông thường. Hơn nữa, bởi vì tổng các góc của bất kì tam giác nào trong không gian Euclid hai hoặc ba chiều đều là 180 độ, các không gian Euclid hai hoặc ba chiều đó là phẳng. Và chẳng có lí do gì chúng ta chỉ dừng lại với hai và ba chiều. Ta định nghĩa *không-gian-Euclid-n-chiều* $\mathbf{E}^n$ là không-gian-n-chiều (nghĩa là, tập hợp các bộ-*n*-số-thực) với khoảng

---

[82] Có nghĩa là, để định nghĩa không gian hai chiều Euclid, phải định nghĩa khoảng cách giữa hai điểm (x_1,y_1) và (x_2,y_2) của $\mathbf{R}^2$ là căn bậc hai của $(x_1- x_2)^2+(y_1- y_2)^2$. *Để định nghĩa* $\mathbf{E}^3$, ta phải có khoảng cách giữa hai điểm (x_1,y_1,z_1) và (x_2,y_2,z_2) của $\mathbf{R}^3$ là căn bậc hai của $(x_1- x_2)^2+(y_1- y_2)^2+(z_1- z_2)^2$.

cách được định nghĩa bởi định lí Pythagoras tổng quát.[83] Một lần nữa, điều này lại chỉ ra rằng tất cả các tam giác có tổng các góc là 180 độ, và do đó, với mọi *n*, một không-gian-Euclid-*n*-chiều là một không gian phẳng.

Sự thay đổi từ trong quan điểm này sang quan điểm khác đã viết lại toàn bộ nền tri thức của hình học và mối liên hệ giữa hình học Euclid với hình học Phi-Euclid. Một khi chúng ta xác định được một khoảng cách, chúng ta có các đường thẳng. Chúng là các đường trắc địa: những đường tạo ra khoảng cách ngắn nhất giữa các điểm gần nhau. Hình học Euclid hoàn toàn không phải là do Chúa tạo ra. Nếu chúng ta định nghĩa khoảng cách thông qua định lí Pythagoras (hay nói cách khác là sao cho định lí Pythagoras đúng), thì ta có được "gói Euclid": các đường song song là duy nhất, tam giác có tổng các góc là 180 độ, tồn tại các hình tam giác đồng dạng với kích thước bất kì,.... Một bề mặt, hoặc đa tạp, với các tính chất nằm trong gói Euclid, đều là *phẳng*. Suy rộng hơn nữa, một khu vực mà trong đó các tam giác có tổng các góc không bằng 180 độ, đặc biệt là các tam giác bất kì của hình học Phi-Euclid, thì không *phẳng*. Chúng bị *cong*. Điều gì có thể tự nhiên hơn? Nhưng công trình của Riemann đã đi xa hơn việc định dạng lại hình học một cách tiềm tàng. Nó còn mở ra các khả năng mới cho khoa học và toán học hiện đại, và về cơ bản thay đổi con đường mà theo đó hình học và topo học sẽ phát triển.

---

[83] Theo định nghĩa, không-gian-Euclid-*n*-chiều **E^n** là **R^n** với khoảng cách giữa hai điểm $(x_1, \ldots, x_n)$ và $(y_1, \ldots, y_n)$ được định nghĩa là căn bậc hai (dương) của $(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$. Đây là định lí Pythagoras tổng quát cho *n* chiều

8

Di sản của Riemann

Điệp khúc ám ảnh

Tất cả những gì đã thay đổi, đã thay đổi hoàn toàn
Một vẻ đẹp không thể cưỡng lại sẽ được sinh ra

trong bài thơ "Phục Sinh, 1916" của W. B. Yeats đã nắm bắt được sự thay đổi triệt để trong quan điểm của Riemann. Hiểu được quan điểm của Riemann là rất quan trọng để tìm hiểu quá trình phát triển của toán học và khoa học trong thế kỉ 20.

Từ bài giảng của Riemann, chúng ta biết rằng bất kì bề mặt nào trong không gian Euclide ba chiều thông thường cũng có một mêtric, do đó có đường thẳng, và vì vậy lại có một dạng hình học. Nó kế thừa mêtric (có nghĩa là, cách đo khoảng cách) của không gian mà nó nằm trong. Theo các thuật ngữ của Riemann, một đường nằm trên một bề mặt chắc chắn là một đường nằm trong không gian Euclid có chứa bề mặt đó, và do vậy ta biết được tốc độ tại một điểm bất kì (bởi vì chúng ta biết được tốc độ ở bất kì điểm nào trên một quỹ đạo trong không

gian Euclid). Một cách khác tương tự để xác định khoảng cách giữa hai điểm - mà không cần để ý đến tốc độ - là chỉ cần dùng một cái thước dây (tưởng tượng nó như một sợi dây mềm nhưng không bị dãn, giống như chỉ nha khoa) trong không gian bao quanh, và đặt nó trên bề mặt, ở giữa hai điểm để đo khoảng cách.

MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG TRẮC ĐỊA

Để minh hoạ rõ hơn ý tưởng của Riemann, hãy xem xét một mặt cầu tròn hoàn hảo trong không gian ba chiều: đó là tập hợp tất cả các điểm có khoảng cách bằng nhau tính đến một điểm cố định. Đường trắc địa, hay đường thẳng trên mặt cầu được gọi là những *vòng tròn lớn* - là những đường cong được tạo ra bằng cách cắt mặt cầu bằng một mặt phẳng đi qua tâm của hình cầu. Để thấy rằng một vòng tròn lớn vẽ nên khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì, hãy lấy một quả bóng chuyền bãi biển hình cầu hoặc một quả cầu và đánh dấu hai điểm trên đó. Bây giờ lấy một sợi dây và kéo căng nó ra giữa hai điểm. Sợi dây sẽ nằm dọc trên một vòng tròn lớn.[54] Tất cả kinh tuyến trên Trái Đất của chúng ta là vòng tròn lớn, nhưng chỉ có một đường vĩ tuyến duy nhất - đồng thời là một

---

[54] Tất nhiên, điều này còn xa mới là một chứng minh (và bạn cần có một quả bóng rất lớn để có thể nhìn thấy nó rõ ràng). Ta có thể xây dựng chứng minh chặt chẽ rằng đường trắc địa là vòng tròn lớn từ lập luận đối xứng. Ngoài ra, người ta có thể sử dụng vi tích phân.

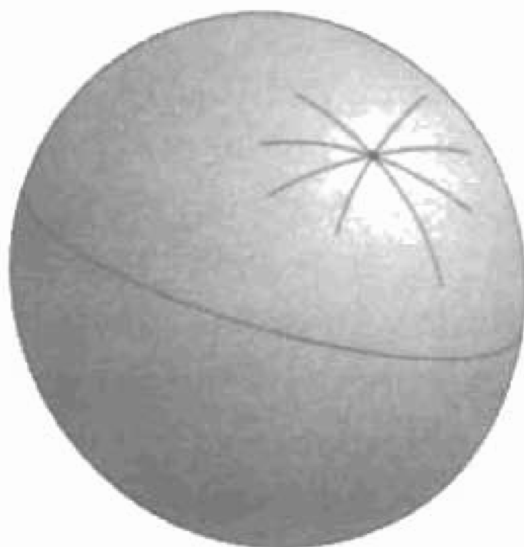
vòng tròn lớn - là đường xích đạo.[85] Mọi đường vĩ tuyến khác có thể được biểu diễn bằng các đường giao nhau của một mặt phẳng trong không gian và Trái Đất, nhưng các mặt phẳng này không đi qua tâm Trái Đất ngoại trừ mặt phẳng xích đạo. Như vậy, ngoại trừ xích đạo, các đường vĩ tuyến khác không phải là vòng tròn lớn, vì thế không thẳng. Lưu ý rằng, như mọi lần, khi nói về Trái Đất, ta đề cập đến bề mặt của Trái Đất, vì vậy chúng ta chỉ đang nói đến các quỹ đạo nằm trên bề mặt. Nếu chúng ta không hạn chế rằng các quỹ đạo phải nằm trên bề mặt, khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm sẽ là đường thẳng trong không gian ba chiều đi xuyên qua các lớp lõi để kết nối hai điểm bất kì.

Qua bất kì điểm nào trên bề mặt, và theo bất kì hướng nào, luôn có một vòng tròn lớn. Một cách để nhận thức điều này là xem một điểm cho trước là một cực, và xem xét tập hợp tất cả các đường kinh tuyến từ đó đến cực đối diện (Hình 28). Ví dụ, giả sử chúng ta đang ở Paris và muốn tìm đường ngắn nhất đi đến Boston. Đừng nghĩ rằng Paris là một điểm nằm ở giữa Bắc Bán cầu. Hãy nghĩ nó như một cực của Trái Đất. Một trong những đường kinh tuyến đi qua cực-Paris sẽ đi qua Boston. Đây chính là hướng mà chúng ta muốn.[86]

---

[85] Bởi vì Trái Đất gần như là một hình cầu, các đường trắc địa rất gần với vòng tròn. Tuy nhiên, Trái Đất không phải là một hình cầu hoàn hảo: nó dẹt ra một chút ở mỗi cực, núi non và thung lũng cũng thay đổi độ cong tại một số điểm khác nhau. Vì vậy, đường trắc địa không hẳn là rất giống với vòng tròn lớn, nhưng rất gần bởi vì kích thước núi non, thung lũng, và vùng cực dẹt là nhỏ so với Trái Đất.

[86] Hoặc, hãy xem hướng mà bạn muốn đi từ một điểm giống như là một đường thẳng nhỏ tiếp xúc với mặt cầu tại điểm đó. Luôn có



Hình 28: Tập hợp các vòng tròn lớn qua một điểm.

Các lộ trình theo vòng tròn lớn ít khi là thẳng trên bản đồ, và các lộ trình là thẳng trên bản đồ lại ít khi là đường trắc địa. Ví dụ, Bắc Kinh và Philadelphia ở trên cùng một vĩ tuyến. Nếu đi từ nơi này đến nơi kia bằng cách đi dọc theo vĩ tuyến, ta sẽ phải đi qua 10.130 dặm. Trong khi đó, lộ trình theo vòng tròn lớn từ điểm này đến điểm kia sẽ chỉ là 6.878 dặm, và đi ngang qua gần Bắc Cực. Lộ trình này ngắn hơn rất nhiều và là quỹ đạo mà ta cảm thấy là thẳng nếu như ta đang lái máy bay. Trên hầu hết bản đồ thế giới, các đường theo vòng tròn lớn trông giống như hướng trở lên phía Bắc sau đó lại hướng xuống dưới. Các đường vĩ tuyến thì ngược lại, nhìn như các đường thẳng. Đó là do khi vẽ bản đồ thế giới trên một tờ

đúng một mặt phẳng trong $\mathbf{R}^3$ đi qua bất kì đường thẳng nào và qua một điểm không nằm trên đường thẳng đó. Do đó, sẽ có đúng một mặt phẳng đi qua trung tâm của hình cầu, và chứa đường tiếp tuyến đại diện cho hướng đi. Mặt phẳng này sẽ cắt mặt cầu thành một vòng tròn lớn dọc theo hướng mong muốn (Đó là một vòng tròn lớn bởi vì mặt phẳng tạo nó đi qua trung tâm của hình cầu.).

giấy phẳng, không thể tránh được việc khoảng cách sẽ bị bóp méo.

Việc không hiểu được rằng vòng tròn lớn mới là đường đi ngắn nhất trên Trái Đất đã gây ra một số lập luận kì quái. Nhiều tôn giáo ưu tiên một hướng đặc biệt nào đó để cầu nguyện. Ví dụ, truyền thống trong Kinh Thánh cổ của người Do Thái đã quy định rằng phải hướng về Jerusalem khi cầu nguyện. Tuy nhiên, mọi người thường nghĩ rằng điều này có nghĩa rằng nếu ta đang ở phía tây của Jerusalem thì phải quay mặt về phía đông. Truyền thống của đạo Baha'i thì nói rằng người ta nên đối mặt với Acre để cầu nguyện. Và theo lễ nghi của người Cơ đốc cổ thì phải hướng về phía đông. Tuy nhiên, các lễ nghi này không hoàn toàn thống nhất, và không ràng buộc.

Lễ nghi Hồi giáo chính xác và quy tắc hơn rất nhiều. Kinh Coran hướng dẫn các tín đồ cầu nguyện như sau "Các ngươi phải quay mặt về hướng Nhà thờ Hồi giáo Linh thiêng: cho dù ở bất cứ nơi đâu, các ngươi cũng phải quay mặt về hướng đó" (Coran 2:144).[87] Hướng cầu nguyện đó hướng về Nhà thờ Hồi giáo Linh thiêng ở Mecca, được gọi là *qibla*, và tất cả các nhà thờ Hồi giáo đều phải được thiết kế để quay mặt về hướng đó. Người Hồi giáo không chỉ cầu nguyện theo hướng *qibla*, mà họ còn không được đi tiểu về hướng đó nữa. Kể từ đầu thời Trung cổ, hướng *qibla* đã được chọn là các đường vòng

---

[87] Nhà thờ Hồi giáo Linh thiêng là Al-Masjid Al-Aqsa ở thành phố Mecca thuộc Vương quốc Arập Xêut.

tròn lớn đi qua Mecca, và rất nhiều nhà khoa học vĩ đại người Hồi giáo trên thế giới đã cất công tìm ra phương pháp để xác định hướng này.

Tuy nhiên, bất đồng vẫn rất dễ xảy ra và nhiều cuộc tranh luận về hướng *qibla* đã nổ ra tại Mĩ. Trong thời gian xây dựng nhà thờ Hồi giáo ở Washington DC vào năm 1953, các kiến trúc sư tham khảo ý kiến của bộ xây dựng Ai Cập tại Cairo về hướng *qibla* và cho mặt nhà thờ quay theo hướng 56 độ, 33 phút và 15 giây về phía Đông Bắc, hơi chếch về phía Bắc của hướng Đông. Sao lại như vậy được, những vị khách viếng thăm nhà thờ, bao gồm cả đại sứ Ai Cập, tự hỏi? Mecca hơi chếch về phía nam của Washington kia mà. Vài đêm mất ngủ đến với mọi người, trong khi đó các số liệu được kiểm tra lại. Quả thực, đường đi ngắn nhất giữa Washington và Mecca hơi chếch về phía Bắc.

Một số người Hồi giáo ở Mĩ không chấp nhận điều này, nhiều chỉ thị ra lệnh cho nhà thờ phải quay mặt về phía Đông Nam thay vì Đông Bắc. Việc trao đổi thậm chí đã trở nên khá gay gắt. Một trong những nguyên nhân của sự nhầm lẫn này, đó là việc đường-cong-góc-không-đổi (gọi là đường *rum*[88]) - nghĩa là, đường luôn tạo ra một góc không đổi so với đường kinh tuyến luôn được nghĩ một cách ngây thơ là thẳng. Thật vậy, đường *rum* này luôn là thẳng trên một tấm bản đồ Trái Đất vẽ theo phép chiếu của Mercator. Bởi vì Trái Đất luôn có một điểm đặc

---

[88] Đường *rum*: khoảng cách chia trên vòng mặt la bàn, bằng 1/32 của 360 độ (1 vòng tròn), hoặc bằng 11 độ 15 phút.

biệt là điểm cực, mà la bàn thì hướng đến đó, do vậy, việc đi theo một hành trình như vậy là tương đối dễ dàng. Tuy nhiên, hành trình đó không phải là một đường trắc địa cũng như ở ví dụ mà chúng ta đã thấy với đường vĩ tuyến kết nối Philadelphia với Bắc Kinh. Trong thực tế, nếu một đường *rum* không phải là đường vĩ tuyến hay kinh tuyến thì nó sẽ xoắn ốc xung quanh các cực (bạn thử nghĩ xem chuyện gì sẽ xảy ra nếu như ta đi liên tục về hướng Tây Bắc).



Hình 29. Tam giác hình cầu.

Dù sao đi nữa, chúng ta biết rằng các kinh tuyến và đường xích đạo luôn là các đường trắc địa. Sử dụng chúng, ta sẽ dễ dàng dựng được các tam giác có các cạnh là các đường trắc địa: chỉ cần lấy hai đường kinh tuyến từ cực Bắc xuống đến đường xích đạo, và đoạn xích đạo cắt hai đường kinh tuyến đó. Chúng đều là các tam giác cân có hai góc đáy là các góc vuông. Bởi vì tổng hai góc đáy là 180 độ, một tam giác như vậy có tổng các góc lớn hơn 180 độ. Thực ra, chúng ta có thể dễ dàng dựng một tam giác

đều với ba góc vuông và do đó tổng các góc của nó bằng 270 độ (Hình 29).

Dễ dàng thấy rằng bất kì tam giác nào trên mặt cầu cũng có tổng các góc lớn hơn 180 độ. Do đó tiên đề song song không có giá trị. Chọn một đường trên mặt cầu, ví dụ một đường kinh tuyến chạy từ Bắc xuống Nam. Bây giờ hãy tưởng tượng đến hai vòng tròn lớn đi ngang qua nó, thậm chí cả hai cùng tạo ra 90 độ với đường đã cho như trong Hình 30, nhưng chúng cũng sẽ gặp nhau (hãy nhớ: không phải đường vĩ tuyến nào cũng là vòng tròn lớn, và do đó không phải là thẳng). Điểm mấu chốt nằm ở chỗ: không có các đường thẳng song song trên mặt cầu.



Hình 30. Không có các đường thẳng song song trên mặt cầu vì hai đường thẳng bất kì luôn cắt nhau.

Hình học trên mặt cầu không phải là hình học Euclid. Chúng ta biết điều này ngay khi dựng được một tam giác có tổng các góc không bằng 180 độ. Nếu, giống như trong trường hợp của một mặt cầu tròn, tất cả tam giác trên một bề mặt có tổng các góc lớn hơn 180 độ, ta nói bề mặt đó có

độ cong dương. Các mặt cầu tròn thậm chí còn kì diệu hơn nữa với đặc điểm: nó hoàn toàn đối xứng nên độ cong ở tất cả các điểm đều bằng nhau.[89] Trên một bề mặt không tuyệt đối tròn, độ cong có thể thay đổi tùy theo từng điểm; và trong thực tế, trên bề mặt Trái Đất độ cong thay đổi: Trái Đất hơi dẹt hơn ở các cực (có nghĩa là, ở đó độ cong dương ít hơn).

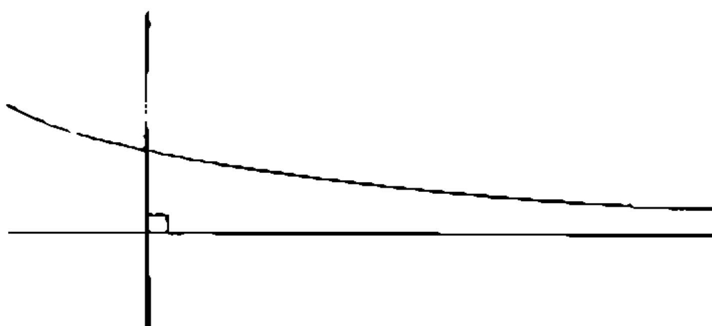
HÌNH HỌC TRÊN CÁC BỀ MẶT

Riemann chỉ ra rằng bất kì không gian nào có độ cong dương không đổi đều nhất thiết phải hữu hạn: các đường trắc địa không kéo dài ra vô tận. Các vòng tròn lớn nhất thiết phải khép kín. Lobachevsky và Gauss xem xét một trường hợp khác mà ở đó định đề song song không có giá trị, cụ thể là trường hợp có nhiều hơn một đường song song với một đường cố định và đi qua một điểm bất kì nằm ngoài đường cố định đó. Về sau ta biết rõ hơn rằng hóa ra là có vô số đường song song với một đường cố định và đi qua một điểm bất kì nằm ngoài đường đó. Đương nhiên ở đó tiên đề thứ 5 không có giá trị: hai đường thẳng có thể cắt một đường khác, tạo thành các góc trong nhỏ hơn hai góc vuông, mà không bao giờ gặp nhau. Trong trường hợp này, tổng các góc trong của một

---

[89] Riemann cho phép tạo ra hình cầu với chiều bất kì. Đặc biệt, khối cầu ba chiều mà chúng ta đã cố hết sức để định nghĩa trong Chương 3 chỉ là đồng phôi với tập hợp các điểm ở khoảng cách bằng nhau với một điểm cố định trong E^4.

tam giác luôn nhỏ hơn 180 độ. Hơn nữa, các tam giác có diện tích lớn hơn thì có tổng các góc lại nhỏ hơn. Bất kì bề mặt nào có tính chất tất cả các tam giác nằm trên bề mặt đó có tổng các góc nhỏ hơn 180 độ được gọi là có *độ cong âm*.



Hình 31. Hai đường thẳng song song (đường thẳng trên bề mặt hyperbol nhìn như là đường cong đối với người quan sát theo trường phái Euclid và ở bên ngoài bề mặt đó) cắt một đường thẳng đứng tạo ra các góc trong nhỏ hơn 180 độ (tiên đề thứ 5 không có giá trị).

Các bề mặt trong không gian ba chiều mang hình yên ngựa đều có độ cong âm (hay nói một cách tương đương, các tam giác được tạo bởi các đường trắc địa trên các bề mặt như vậy đều có tổng các góc nhỏ hơn 180 độ). Ngược lại, bất kì bề mặt nào có độ cong âm trong không gian ba chiều phải có hình yên ngựa ở khắp nơi. Trong Hình 32, chúng ta phác thảo một tam giác có các cạnh là các đường trắc địa. Lưu ý rằng, ngược lại với trường hợp của hình cầu trong Hình 29, mà ở đó một tam giác có các cạnh là đường trắc địa (có nghĩa là các đường thẳng) dường như phình ra, có tổng các góc lớn hơn 180 độ; ở đây hình tam giác có các cạnh là đường trắc địa trên bề mặt hình yên

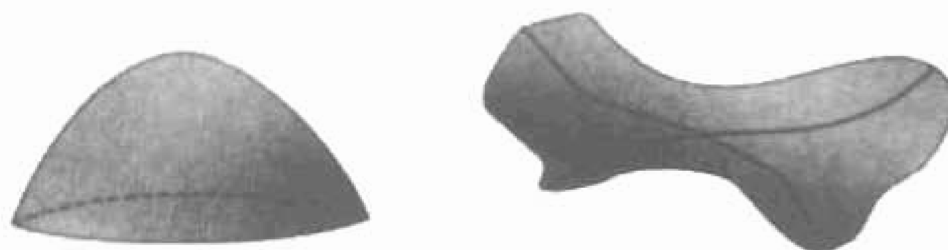
ngựa dường như co rút vào tạo thành các góc có tổng nhỏ hơn 180 độ. Tất nhiên, một sinh vật nhỏ bé sống trên cả hai bề mặt đều nhìn thấy các đường trắc địa là các đường thẳng hoàn hảo, và chỉ có thể cho chúng ta biết một tam giác trên bề mặt đó là phồng ra hay rút vào bằng cách đo tổng các góc.



Hình 32. Bề mặt hình yên ngựa.

Có cách khác để tưởng tượng về độ cong. Cũng giống như trên một mặt phẳng, với bất cứ bề mặt nào mà trên đó ta có thể định nghĩa khoảng cách, thì ta cũng có thể định nghĩa một *vòng tròn* như là một tập hợp các điểm có khoảng cách không đổi đến một điểm cho trước. Chúng ta đã biết từ thời Babylon rằng trên các mặt phẳng, tỉ lệ chiều dài của một vòng tròn (nghĩa là chu vi) và độ dài đường kính là một hằng số, gọi là *pi* và viết là π; diện tích hình tròn chỉ là π lần bán kính của vòng tròn nhân với chính nó (Điều này được trình bày bằng công thức πr^2 [đọc là "pi nhân r bình phương"] trong đó bán kính r là một nửa đường kính.). Trên một bề mặt có độ cong dương, tỉ lệ chu vi của một vòng tròn

với chiều dài đường kính nhỏ hơn π, và diện tích của hình tròn nhỏ hơn diện tích tính bằng công thức cổ xưa. Trên một bề mặt có độ cong âm, ngược lại, tỉ lệ chu vi của một vòng tròn so với chiều dài đường kính lớn hơn π, và diện tích của hình tròn lớn hơn diện tích tính bằng công thức đó. Trong cả hai trường hợp, bán kính hình tròn càng lớn hơn, diện tích càng chênh lệch hơn so với πr^2.



Hình 33. Hình bên trái là một bề mặt có độ cong dương, hình tròn trên đó có chu vi và diện tích nhỏ hơn. Ở bên phải là một bề mặt có độ cong âm, hình tròn có chu vi và diện tích lớn hơn.

Trên một bề mặt có độ cong âm, nếu chúng ta bắt đầu từ hai điểm rất gần nhau nằm trên cùng một đường trắc địa và đi theo các hướng có vẻ như song song với nhau, thì hai đường này sẽ ngày càng rời xa nhau bởi có nhiều bề mặt hơn. Điều ngược lại là đúng với một bề mặt có độ cong dương. Trong bài diễn thuyết của mình, Riemann đã không trực tiếp đề cập đến các công trình của Lobachevsky và Bolyai, nhưng ông chắc chắn đã nghĩ đến chúng.

CÁC KHÁC NIỆM KHÁC NHAU VỀ TÍNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Sau Riemann, đã trở nên rõ ràng rằng trên cùng một đối tượng toán học không những chỉ tồn tại các cấu trúc khác nhau mà ở đó còn có các khái niệm khác nhau về tính tương đương giữa các đối tượng va các cấu trúc. Từ một góc nhìn, hai đối tượng với các cấu trúc khác nhau có thể tương đương, cũng như hai ngôi nhà được xây dựng với cùng thiết kế nhưng với các vật liệu khác nhau có thể được xem xét như nhau. Nhưng ở một góc nhìn khác, chúng có thể khác nhau như đêm với ngày.

Từ quan điểm của topo học, khai niệm thích hợp của sự tương đương là tính đồng phôi: hai không gian được xem là giống nhau nếu giữa chung có một phép đồng phôi (Xin nhắc lại rằng, một phép đồng phôi giữa hai không gian là một phép cho tương ứng một-một giữa chúng, do đó các điểm gần nhau ở không gian này được đối chiếu với các điểm gần nhau ở không gian kia.). Khi đề cập đến các bề mặt hai chiều, topo học thường được gọi là "hình học tấm cao su" bởi ta có thể hình dung ra một phép đồng phôi của một hình chữ nhật, ví dụ bằng cách tưởng tượng về các khả năng mà ta có thể để làm biến dạng hình chữ nhật, nếu đó là một tấm cao su cực kì dẻo và rất dai. Việc chiếu một hình chữ nhật lên trên một khu vực của một bề mặt bằng phép đồng phôi cũng giống như việc bọc sát lớp vỏ nhựa lên một khu vực cua bề mặt đo. Topo học nghiên cứu các

tính chất không đổi sau khi thực hiện các phép đồng phôi.[90]

Mặc dù quan tâm chủ yếu của Riemann không phải là topo học[91], ông đã thực hiện một số lượng lớn khám phá góp phần nâng cao tầm hiểu biết của chúng ta về lĩnh vực này.[92] Ông giới thiệu khái niệm về lớp cắt bề mặt dọc

---

[90] Một khái niệm dựa trên khái niệm phép đồng phôi, và thường nhầm lẫn với phép đồng phôi, là tương đương thông qua phép đồng phôi xung quanh (*equivalence via ambient homeomorphism*). Khi phân loại bề mặt theo topo học, chúng ta chỉ cần phép đồng phôi đó chiếu một bề mặt lên một bề mặt khác. Nếu đang xem xét các bề mặt trong không gian ba chiều, chúng ta cần một điều kiện bổ sung là phép đồng phôi từ không gian ba chiều đến bản thân nó là sự tương ứng một-một giữa các bề mặt đó. Đây cũng là khái niệm thích hợp của tính tương đương trong lí thuyết thắt nút - một hình xuyến bình thường và một hình xuyến thắt nút không nhất thiết phải tương đương.

[91] Từ topo học (*topology*) lần đầu tiên được sử dụng bởi Johann Benedikt Listing (1808-1882) trong cuốn sách của ông *Vorstudien zur Topologie* (n.p.: 1847). Một cách diễn đạt cũ hơn, *analysis situs*, nghĩa là "phân tích địa điểm" đã được sử dụng trước đó, và trong thực tế phổ biến hơn *topo học* cho đến thập kỉ 1920. Trong cuốn sách của ông, Listing định nghĩa topo là "nghiên cứu các quy luật định tính của mối quan hệ giữa các địa điểm", và ông thể hiện niềm tin mạnh mẽ rằng môn khoa học non trẻ này sẽ là một đối tượng xứng đáng để nghiên cứu và sẽ mang lại kết quả sâu sắc: "Bằng topo, chúng ta hiểu các nghiên cứu về tính chất định tính của các dạng không gian, hoặc quy luật của mối liên hệ, của vị trí tương quan và của thứ tự các điểm, đường, bề mặt, vật thể riêng lẻ hoặc kết hợp với nhau, và trừu tượng hóa các mối liên hệ giữa chúng bằng đo đạc hoặc kích thước." Mặc dù không nghiên cứu topo một cách riêng rẽ, nhưng nhờ các ứng dụng của nó lên giải tích, Riemann cũng đã tạo ra một bước tiến rất lớn trong việc phát triển topo học.

[92] Xem lịch sử phát triển topo học cho tới công trình của Poincaré

theo các vòng lặp khép kín sao cho phần còn lại trở thành đồng phôi với một hình chữ nhật. Số lượng lượt cắt nhỏ nhất để làm được điều này là hằng số quan trọng nhất của bề mặt[93] (và có quan hệ mật thiết với số lượng hình xuyến trong khai triển của một tổng liên thông đã được đề cập đến trong Chương 3).

Mặc dù phép đồng phôi là khái niệm tự nhiên của tính tương đương giữa các bề mặt (hoặc, nói một cách tổng quát hơn, các đa tạp) theo quan điểm của topo học, hai bề mặt giống nhau trên quan điểm topo học có thể rất khác trên quan điểm hình học. Một mặt cầu tròn, bề mặt mỏng bao quanh một điếu xì gà, và bề mặt của quả trứng (và, vì vậy tất cả các bề mặt vẽ ở Hình 7 trong Chương 3) đều giống nhau về mặt topo học, nhưng khác nhau về mặt hình học. Như Riemann đã nhấn mạnh, một dạng hình học là một cấu trúc đặc biệt trên một đa tạp. Nó định nghĩa khoảng cách giữa hai điểm bất kì trên đa tạp đó. Nếu một bề mặt nằm bên trong một không gian lớn hơn và không gian này có một dạng hình học (ví dụ như không gian ba chiều Euclid), thì nó sẽ thừa hưởng dạng hình học từ không gian lớn hơn này. Ta có thể định nghĩa các dạng hình học khác nhau hay khoảng cách khác nhau, trên cùng một đa tạp. Khái niệm tự nhiên của tính tương đương giữa các đa tạp mang các dạng hình học

---

trong cuốn sách của Jean-Claude Pont, *La topologie algébrique des origines à Poincaré* (Paris: Presses Universitaires de France, 1974).

[93] Con số mà các nhà toán học thật sự sử dụng gọi là *giống* (genus), tương đương với số lượt cắt nhỏ nhất cần để tạo ra một hình chữ nhật còn lại.

được gọi là *phép đẳng cự* (isometry). Phép đẳng cự là một phép chiếu một-một mà qua đó khoảng cách được bảo toàn. Nếu hai điểm lúc đầu cách nhau chính xác một phần triệu inch, thì ảnh của chúng dưới phép chiếu đẳng cự cũng sẽ cách nhau chính xác một phần triệu inch. Nếu có một phép đẳng cự giữa các đa tạp sở hữu các dạng hình học, thì các đa tạp này được gọi đẳng cự với nhau.

Phép đẳng cự là khái niệm của tính tương đương mà theo đó các dạng hình học được bảo toàn và khác với phép đồng phôi: là khái niệm của tính tương đương thích hợp trong topo học. Bất kì phép đẳng cự nào cũng là một phép đồng phôi, nhưng điều ngược lại thì không đúng.[94] Chúng ta vừa nói rằng một người có thể hình dung về một phép đồng phôi của một hình chữ nhật bằng cách tưởng tượng các hình chữ nhật được làm bằng một tấm nhựa dẻo, và phép dồng phôi là cách dính sát tấm nhựa đó lên bề mặt của một vật thể nào dó. Để hình dung một phép đẳng cự, mà theo đó khoảng cách bảo toàn, ta phải nghĩ đến việc mặc áo, hoặc trùm lại, một vật gì đó bằng một tấm vải làm từ một thứ vật liệu mềm mại nhưng không bị co dãn. Nếu ta có thể xếp vừa vặn một tấm khăn trải giường hình chữ nhật bằng vải lanh lên một phần của một bề mặt, thì ta sẽ có được một phép đẳng cự giữa hình chữ nhật và phần của bề mặt mà tấm khăn trải giường phủ lên (và phần của bề mặt đó được gọi là *phẳng*). Như

[94] Mặc dù không khó để nhận ra điều này (trong thực tế, phép chiếu một-một bảo toàn khoảng cách là một phép đồng phôi), nhưng thường thì khó thiết lập mối quan hệ giữa các khái niệm khác nhau về tính tương đương.

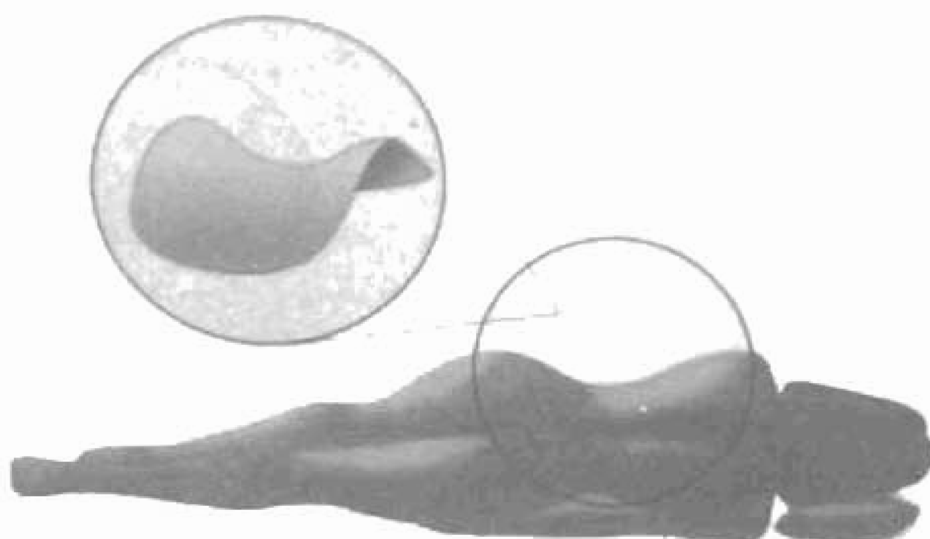
vậy, một bề mặt hình trụ là phẳng, bởi vì ta hoàn toàn có thể trùm một tấm vải lên nó. Mặt khác một mặt cầu hay đỉnh đầu của một người thì không phẳng - một tấm khăn trải giường không thể trùm lên nó một cách hoàn hảo mà không tạo ra nếp nhăn.



Hình 34. Tạo ra tấm vải có độ cong dương: ta cần phải cắt bỏ đi một miếng vải hình tam giác.

Tuy nhiên, ta có thể tưởng tượng mình là một thợ may cực khéo, hoặc tốt hơn nữa là một thợ dệt, dệt được một mảnh vải hình cầu vừa vặn tuyệt đối với đỉnh đầu của bạn. Đội chiếc mũ đó lên, ta sẽ có một đẳng cự giữa mũ và phần đầu mà nó bao phủ. Trên mũ vải, một vòng tròn có bán kính cố định sẽ phải có diện tích bên trong nhỏ hơn một vòng tròn có cùng bán kính nằm trên tấm khăn trải giường. Người thợ may tạo ra hiệu ứng này bằng cách cắt một hình tam giác nhỏ ra khỏi tấm vải - tức là cắt một mảnh nhỏ của tấm vải ra, sau đó khâu phần còn lại (Hình 34). Dĩ nhiên, ta cần phải có các tấm vải có độ cong khác nhau để bao phủ các đỉnh đầu hoặc những mặt cầu có kích thước khác nhau. Bất kì phần nào trên bề mặt của bất kì đối tượng nào có thể được bao phủ một cách hoàn hảo, hoặc mặc áo nếu bạn muốn, bằng tấm vải hình cầu này đều sẽ đẳng cự với một phần của một hình

cầu (và sẽ có cùng một độ cong dương như tấm vải này). Ta sẽ phải gấp một mảnh vải có độ cong dương để đặt nó vừa vặn vào trong một ngăn kéo hình chữ nhật. Hãy nghĩ tới một chiếc mũ trùm đầu.

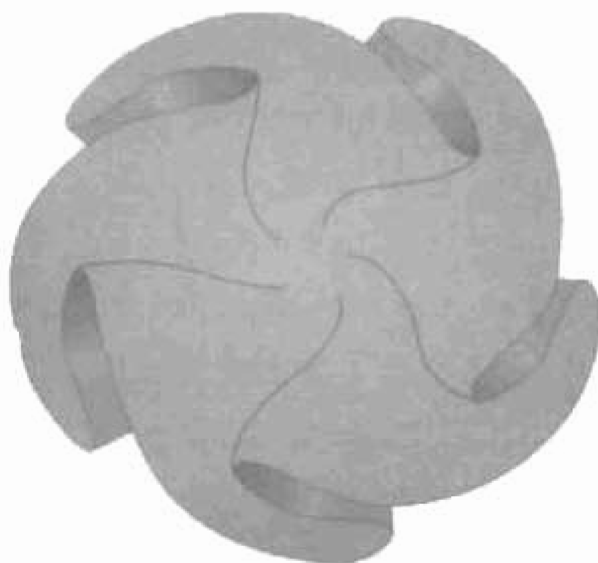


Hình 35. Tấm vải có độ cong âm che phần hông của người phụ nữ.

Ngược lại với đỉnh đầu của một người, vùng hông hình yên ngựa của người phụ nữ có độ cong âm (Hình 35), và ta có thể tưởng tượng về một tấm vải có thể che phủ nó một cách hoàn hảo. Ở đây, khu vực bên trong một vòng tròn có bán kính nhất định chứa nhiều vật chất hơn một vòng tròn có cùng bán kính trên mặt phẳng, và để may tấm vải đó, thợ may bắt đầu với một mảnh vải phẳng, cắt một hình tam giác như đã làm ở trên, nhưng thay vì khâu các cạnh của phần còn lại với nhau, thì bây giờ thêm một miếng vải hay một miếng đệm khác. Tùy thuộc vào độ tăng giảm của diện tích khi bán kính thay đổi, ta có được các mặc phẳng có độ cong khác nhau.

Tấm vải có độ cong âm sẽ bị nhiều nếp nhăn nếu ta cố đặt nó lên trên một chiếc khung phẳng của một ngăn kéo (Hình 36).

Một phép đẳng cự do đó có thể xem như là việc phủ lên một phần của một bề mặt bằng một mảnh vải: Điều kiện quan trọng là tấm vải phải dẻo, nhưng không bị co dãn.



Hình 36. Tấm vải có độ cong âm gấp nếp lại khi nằm trên bề mặt phẳng.

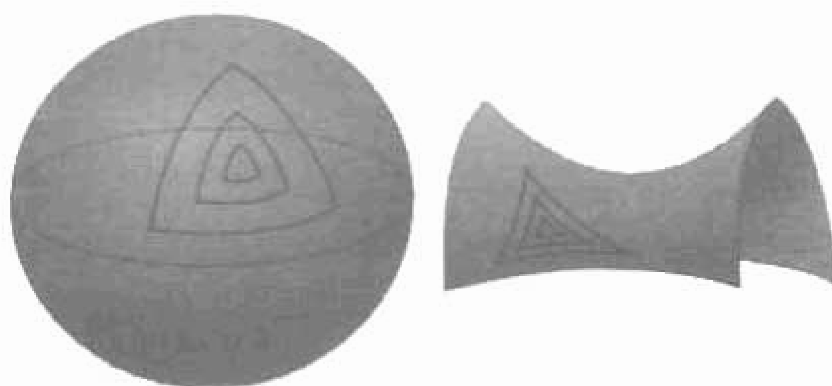
Một cách tình cờ, nếu ta cố gắng căng một miếng vải có độ cong dương không đổi theo tất cả các hướng, nó sẽ đóng lại, làm thành một mặt cầu. Nếu ta tưởng tượng đến việc căng một miếng vải với độ cong âm không đổi theo tất cả các hướng, ta sẽ được một bề mặt gọi là *mặt phẳng hyperbol*. Bề mặt này ngày càng trở nên dẹt hơn và cuối cùng sẽ choán hết chỗ trong không gian ba chiều Euclid.[95]

---

[95] Đây là định lí được chứng minh lần đầu bởi Hilbert.

Sau này chúng ta sẽ xem xét các cách diễn giải khác về loại bề mặt này.

Nếu ta lấy một đa giác trên một bề mặt phẳng và phóng to nó lên, thì các góc sẽ giữ nguyên, và độ dài của các cạnh sẽ giữ nguyên tỉ lệ giữa chúng. Nếu ta lấy một đa giác trên một bề mặt có độ cong dương và phóng to lên, các chiều dài cạnh của đa giác không tăng với một mức độ như mong đợi và các góc giữa chúng sẽ to ra (bên trái, Hình 37). Nếu ta lấy cùng một đa giác trên một bề mặt có độ cong âm và lại phóng to lên, các cạnh của đa giác sẽ tăng lên với một mức độ nhanh hơn mong đợi và các góc giữa chúng sẽ nhỏ lại (bên phải, Hình 37). Nếu bề mặt có độ cong âm này kéo dài đến vô tận, và nếu đa giác này là đều, thì ta thực sự có thể làm cho các góc nhỏ dần về không, một cách gần nhất theo ý muốn, bằng cách phóng to đa giác đó lên.



Hình 37. Các đa giác càng lúc càng phình ra trên một bề mặt có độ cong dương làm tăng tổng các góc, và làm giảm con số này trên bề mặt có độ cong âm. Trên bề mặt phẳng, tổng này giữ nguyên.

Tóm tắt điểm chính bài giảng của Riemann:

- Ta cần phải phân biệt thực tế toán học với thực tế vật lí. Riemann giả định là chỉ nói về các đối tượng toán học.
- Việc khảo sát các không gian toán học khác nhau cung cấp các mô hình có thể của vũ trụ, và ngăn chúng ta khỏi bị rơi vào những định kiến hẹp hòi.
- Những không gian liên tục có thể có số chiều bất kì, và thậm chí có thể có số chiều là vô hạn.[96]
- Ta cần phải phân biệt giữa khái niệm về một không gian và khái niệm về một không-gian-sở-hữu-một-dạng-hình-học. Cùng một không gian có thể có các dạng hình học khác nhau. Một dạng hình học là một cấu trúc bổ sung trên một không gian. Ngày nay, chúng ta nói rằng ta phải phân biệt giữa topo học và hình học.
- Các đa tạp bao gồm một lớp các không gian đặc biệt đẹp - chúng là những không gian có thể được biểu diễn bằng đồ thị, theo nghĩa là, ở gần một điểm bất kì, các điểm xung quanh có thể được đưa vào một phép tương ứng một-một với các bộ *n* số. Đó là những không gian mà trên đó ta có thể làm vi tích phân.
- Một cách hữu hiệu khác để chỉ rõ dạng hình học trên một đa tạp đó là việc có được một phương pháp để đo tốc độ của một vật thể đang di chuyển dọc theo một đường cong. Tốc độ có thể khác nhau từ

[96] Số chiều cần phải là số nguyên dương hoặc vô hạn. Riemann cũng cho phép không gian rời rạc nhưng chúng ta chưa cần nói đến ở đây.

điểm này sang điểm khác. Riemann phát triển phương pháp vi tích phân cần thiết để thực hiện điều này và những hệ quả theo sau. Đặc biệt, ta có thể định nghĩa các đường thẳng và đo các góc. Độ cong là số đo độ lệch so với các tam giác có tổng các góc là 180 độ.

- Một lớp các đa tạp đẹp đẽ và các dạng hình học nằm trên chúng là những đa tạp có độ cong không đổi. Chúng là những không gian duy nhất cho phép chuyển động của các vật thể cứng nhắc (có nghĩa là, các vật thể mà các chiều dài và các góc không thay đổi) và là những không gian đối xứng nhất trong tất cả các loại không gian.
- Khi xem xét một cách toàn bộ, vũ trụ của chúng ta có thể trông rất khác so với không gian ba chiều Euclid. Trường hợp sau cũng có thể xảy ra: nếu chúng ta được phóng lớn một cách liên tục và nhìn vào vũ trụ đã trở nên rất nhỏ so với chúng ta, nó sẽ không giống như một đa tạp, mà mang tính rời rạc hoặc một cái gì đó hoàn chỉnh.

TÁC ĐỘNG TỪ BÀI GIẢNG CỦA RIEMANN

Giống với rất nhiều công trình của ông, bài giảng này của Riemann có sức công phá tới tận gốc rễ. Một vài chi tiết ông đề cập đến đã tồn tại ở đâu đó. Tuy nhiên, ông kết tinh chúng, sử dụng chúng để tạo ra hệ thống mạch lạc và đúc kết lại những cái đã biết theo một trình tự cực kì mới mẻ, đồng thời cung cấp các công cụ và các cấu trúc

Tóm tắt điểm chính bài giảng của Riemann:

- Ta cần phải phân biệt thực tế toán học với thực tế vật lí. Riemann giả định là chỉ nói về các đối tượng toán học.
- Việc khảo sát các không gian toán học khác nhau cung cấp các mô hình có thể của vũ trụ, và ngăn chúng ta khỏi bị rơi vào những định kiến hẹp hòi.
- Những không gian liên tục có thể có số chiều bất kì, và thậm chí có thể có số chiều là vô hạn.[46]
- Ta cần phải phân biệt giữa khái niệm về một không gian và khái niệm về một không-gian-sở-hữu-một-dạng-hình-học. Cùng một không gian có thể có các dạng hình học khác nhau. Một dạng hình học là một cấu trúc bổ sung trên một không gian. Ngày nay, chúng ta nói rằng ta phải phân biệt giữa topo học và hình học.
- Các đa tạp bao gồm một lớp các không gian đặc biệt đẹp - chúng là những không gian có thể được biểu diễn bằng đồ thị, theo nghĩa là, ở gần một điểm bất kì, các điểm xung quanh có thể được đưa vào một phép tương ứng một-một với các bộ *n* số. Đó là những không gian mà trên đó ta có thể làm vi tích phân
- Một cách hữu hiệu khác để chỉ rõ dạng hình học trên một đa tạp đó là việc có được một phương pháp để đo tốc độ của một vật thể đang di chuyển dọc theo một đường cong. Tốc độ có thể khác nhau từ

[46] Số chiều cần phải là số nguyên dương hoặc vô hạn. Riemann cũng cho phép không gian rời rạc nhưng chúng ta chưa cần nói đến ở đây.

toán học mới, để triển khai các khái niệm của ông khi cần thiết và thúc đẩy toán học đi theo một hướng hoàn toàn mới. Một khi nắm vững được những gì ông nói, ta sẽ không bao giờ xem xét một bài toán hoặc một lĩnh vực đang được thảo luận theo cách cũ nữa. Ông đã hoàn toàn thay đổi các thuật ngữ của sự biện luận. Điều này cũng gần giống như việc một ai đó bị mù, giờ đột nhiên lại nhìn thấy được. Bởi vì Riemann đã thay đổi cách suy nghĩ của chúng ta, cho nên rất khó xác định được một cách chính xác ông ảnh hưởng tới các công trình của những người khác ở chỗ nào - ảnh hưởng của ông ở khắp nơi, và luôn phát triển mạnh mẽ hơn, chứ không mất đi theo thời gian khi các cá nhân đã lĩnh hội và nắm bắt tiện ích từ các ý tưởng của ông. Phải thừa nhận rằng toán học hiện đại đã bắt đầu với Riemann.

Ta sẽ còn phải mất rất nhiều năm nữa để hiểu và ứng dụng hết các hệ quả của những gì Riemann đã nói trong bài giảng tập sự của ông. Ngay sau khi bài diễn thuyết của ông được xuất bản, nhà vật lí nổi tiếng Hermann von Helmholtz đã công bố rằng ông cũng từng nghĩ đến những không gian nhiều chiều. Ông cho rằng điểm khởi đầu đúng là điều kiện quy định rằng, ta có thể di chuyển các vật thể rắn bên trong không gian mà không cần phải biến dạng chúng. Helmholtz chỉ ra rằng điều này tương đương với điều kiện quy định rằng không gian phải có độ cong không đổi. Những không gian có độ cong không đổi là đẹp và hấp dẫn về mặt hình học, nhưng sự linh hoạt đặc biệt mà Riemann đem lại mới là yếu tố rất có giá trị. Bề mặt của thế giới chúng ta xét về mặt topo học là (có

nghĩa là, có thể được đặt trong một phép tương ứng một-một liên tục với) một mặt cầu, nhưng không phải là một bề mặt có độ cong không đổi. Đó không phải là một mặt cầu tròn hoàn hảo, mà dẹt ra ở hai cực, và có những khối u (tức là núi và thung lũng) ở trên đó.

William Clifford, một nhà hình học tài năng - người đầu tiên đã dịch bài diễn thuyết của Riemann sang tiếng Anh - ngay lập tức đã nhìn thấy tiềm năng của hình học Riemann trong việc mô tả các hiện tượng vật lí.

> "Tôi khẳng định những sự thật sau: (1) Các phần nhỏ của không gian một cách tự nhiên có tính chất tương tự với các ngọn đồi nhỏ trên một bề mặt gần như phẳng. (2) Tính chất cong hay gãy gập này được truyền một cách liên tục từ phần không gian này sang phần không gian khác theo cách của một làn sóng. (3) Sự biến đổi của độ cong không gian này thực sự là những gì xảy ra trong hiện tượng mà chúng ta gọi là chuyển động của vật chất - cho dù là nặng trịch hay là nhẹ bẫng. (4) Trong thế giới vật chất này chẳng có gì khác xảy ra cả, ngoại trừ những biến đổi này, có thể tuân theo quy luật liên tục."[97]

Đáng buồn thay, Clifford cũng giống Riemann ở một khía cạnh khác: ông mất vì bệnh lao trước tuổi bốn mươi. Clifford không có đủ thời gian cũng như không đủ chuyên môn vật lí để phát triển các ý tưởng của ông. Tuy

[97] W. K. Clifford, *Mathematical Papers*, hiệu đính R. Tucker (London: Macmillan, 1882), 21-22 (Nguyên bản là W. K. Clifford, "On the Space-Theory of Matter", *Cambridge Philosophical Society Proceedings* 2 [1876].).

nhiên, những suy nghĩ của ông đã dự báo về một vài ý tưởng sẽ được phát triển một cách đầy đủ trong thuyết tương đối rộng. Hình học Riemann cung cấp thứ ngôn ngữ toán học cần thiết để diễn giải những ý tưởng của Einstein. Ta không nhất thiết phải đặt ra câu hỏi liệu trực giác vật lí sâu sắc của Riemann có đóng vai trò sống còn trong những công trình toán học của ông hay không, và liệu rằng ông có nhận ra một cách rõ ràng mối liên hệ giữa các ý tưởng mang tính hình học và những ý tưởng mang tính vật lí của ông hay không.

Riemann không độc lập phát minh ra tất cả, hoặc hầu như tất cả, những gì mà ngày nay chúng ta gọi là hình học Riemann. Ông chỉ khởi đầu nó. Ông triển khai một số ý tưởng hình học của mình trong một bài báo về sự truyền dẫn nhiệt gửi đến Viện Hàn lâm Paris, nhưng sức khỏe của ông xấu đi nhanh chóng sau năm 1862, và cuộc sống của ông không còn đủ dài để tiếp tục phát triển những ý tưởng hình học đó. Để triển khai những ý tưởng này của Riemann, nhiều nhân vật vĩ đại khác đã phải bỏ ra rất nhiều năm làm việc vất vả và sáng tạo.

Mặc dù Riemann không cụ thể đề cập đến hình học Phi-Euclid trong bài giảng tập sự của mình, nhưng công trình của ông đã cung cấp những cơ sở giúp cho hình học Phi-Euclid gia nhập những luồng tư tưởng toán học chính thống. Nó thực hiện điều này bằng cách cung cấp một bối cảnh mà trong đó hình học Phi-Euclid cũng có vẻ tự nhiên giống như hình học Euclid, và cả hai cùng xuất hiện như là những trường hợp đặc biệt trong một khối quan niệm mang tính khái quát hơn về hình học.

Trong thập kỉ sau năm 1860, một nhà hình học người Ý, Eugenio Beltrami (1835-1900), đã khám phá rằng các đường trắc địa trên một bề mặt có độ cong âm không đổi có hành vi giống như các đường trong hình học của Lobachevsky. Ông trình bày những kết quả này trong một bài báo mà ngày nay rất nổi tiếng, chỉ ra rằng không cần thiết phải thêm vào các khái niệm hoặc ý tưởng mới cho hình học Euclid để có được hình học Phi-Euclid. Để đưa ra ví dụ về một bề mặt có độ cong âm không đổi, Beltrami đã sử dụng một giả mặt cầu (Hình 38), là bề mặt có được bằng cách quay một đường cong gọi là đường tractric vòng quanh đường tiệm cận của nó.[98] Có một vấn đề mang tính kĩ thuật với chiếc giả mặt cầu này: nó có một bờ sắc nhọn - một cư dân sống trên một bề mặt như vậy sẽ đi tới được bờ đó trong một thời gian hữu hạn. Khi đó, người ta chưa rõ liệu có tồn tại hay không các bề mặt với độ cong âm không đổi mà không bờ.

Luigi Cremona (1830-1903), nhà hình học người Ý hàng đầu của thời đó, đã băn khoăn về bản thảo bài báo của Beltrami, mối lo ngại của ông đã thuyết phục Beltrami không đăng bài báo của mình. Beltrami có lẽ đã làm vậy nếu ông không có được một bản sao bài giảng của Riemann. Bài giảng này làm ông nhận ra rằng những gì ông đang nói đến thực sự có ý nghĩa. Những bề mặt có độ cong không đổi tồn tại, cho dù ta có thể đặt được

---

[98] Tractric là đường cong trên mặt phẳng được tạo bởi một đầu của một sợi dây có độ dài nhất định, mà ban đầu hướng thẳng lên trên, khi đầu kia của sợi dây di chuyển theo một đường thẳng nằm ngang trong mặt phẳng



Hình 38. Giả mặt cầu.

chúng vào trong không gian ba chiều hay không. Bài báo đó của Beltrami có một ảnh hưởng mang tính quyết định đến Poincaré, một vài năm sau.

Sự phân biệt giữa thực thể vật lí và thực thể toán học của Riemann là rất quan trọng nhưng thường bị lãng quên. Sẽ là vô cùng tự do nếu ta không phải luôn ngoái đầu lại để mà lo lắng rằng liệu bề mặt này hay bề mặt kia mà ta có thể dựng lên có vừa vặn hay không trong không gian ba chiều. Riemann đã cung cấp một sân chơi lạ thường cho các nhà toán học. Chúng ta không cần phải lo lắng liệu không gian Euclid năm chiều có tồn tại hay không - đương nhiên là có. Đó chỉ là tập hợp của các bộ-năm số thực, với khoảng cách giữa hai điểm được định

nghĩa bởi một biến thể của công thức Pythagoras. Còn điều gì nữa không tồn tại? Tương tự, việc dựng lên các ví dụ của một hình xuyến phẳng là dễ dàng - ta có thể định nghĩa chúng là tập hợp của các cặp, mỗi cặp bao gồm một điểm của một vòng tròn này và một điểm của vòng tròn khác, với một công thức thích hợp cho mêtric. Chúng ta thậm chí còn có thể viết chúng ra thành một tập hợp con cụ thể của không gian Euclid bốn chiều. Bạn có thể tính toán tất cả mọi thứ. Không còn điều gì có thể thực tế được hơn thế nữa.

Một vài ý tưởng toán học đang được tranh luận trong các trường đại học Đức vào thời điểm đó đã xuất hiện rải rác trên các phương tiện truyền thông đại chúng. Đồng nghiệp của von Helmholtz ở Leipzig, nhà tâm lí và sinh lí học Gustav Fechner đã viết một truyện ngắn, *Không gian có bốn chiều*, dưới bút danh Tiến sĩ Mises.[99] Fechner sử dụng bút pháp tương đồng để miêu tả các sinh vật ở không gian hai chiều trải nghiệm sự sống trong không gian ba chiều như thế nào. Ông xem thời gian như một chiều thứ tư. Phương pháp tương đồng của Fechner mê hoặc những người cầm bút, và vào năm 1884, Edwin Abbot, ở Anh, đã viết một cuốn sách nhỏ và thú vị, với một phần nội dung châm biếm xã hội thời Victoria, phần khác là một bài tập mở rộng trong hình học, có tựa đề: *Vùng đất phẳng: Truyền thuyết lãng mạn của không gian nhiều*

[99] Câu chuyện xuất hiện trong tuyển tập của Fechner, *Vier Paradoxe* xuất bản năm 1846 dưới tên giả Dr. Mises. Xin xem giới thiệu của T. Banchoff *Flatland* của Abbott ở ghi chú dưới đây.

chiều (Flatland: A Romance of Many Dimensions). Trang đầu in như sau:

Gửi
Các Cư dân của KHÔNG GIAN NÓI CHUNG
Và H.C. NÓI RIÊNG
Tác phẩm này là Quà tặng
Của một Thổ dân Nhỏ bé của vùng Đất phẳng
Với Hi vọng rằng
Ngay cả khi anh Xung phong khám phá những Bí ẩn
Của không gian BA Chiều
Mà trước đây anh vốn quen thuộc
Với CHỈ HAI chiều
Như vậy, mọi Công dân của Dải tinh tú này
Có thể khao khát cao hơn và cao hơn
Đến Bí mật của KHÔNG GIAN BỐN, NĂM HAY THẬM CHÍ SÁU chiều
Qua đó góp phần
Mở rộng TRÍ TƯỞNG TƯỢNG
Và vào sự Phát triển khả dĩ
Của Quà tặng quý hiếm và tuyệt hảo của sự GIẢN ĐƠN
Trong số những giống loài cấp cao
Của NHÂN LOẠI BỀN VỮNG

Cuốn sách này vẫn còn tiếp tục được in kể từ khi nó ra đời và vẫn có giá trị với người đọc ngày nay.[100] Nó có lẽ

---

[100] Hai ấn bản gần đây có ghi chú và giới thiệu của hai nhà hình học, xem E. A. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, giới thiệu và ghi chú bởi T. Banchoff (Princeton: Princeton University Press, 1991); và E. A. Abbott, *The Annotated Flatland: A Romance of*

đã đưa khái niệm không gian nhiều chiều vào trong nền tri thức đại chúng một cách thành công hơn tất cả các bài giảng toán học trong thế kỉ 20 gộp lại.

TÍNH NHÂN BẢN CỦA RIEMANN

Sau tất cả những lời nói và hành động, dường như vẫn tồn tại một bí ẩn sâu thẳm về Riemann.

Ông là một trong những nhà tư tưởng táo bạo nhất của mọi thời đại, nhưng theo tất cả các thông tin còn lưu lại, thì tính nhút nhát trong các tình huống xã hội gần như là biểu hiện mang tính bệnh lí của ông. Ông thực sự chỉ được thoải mái với gia đình của mình. Làm thế nào mà một con người rụt rè, tôn trọng mọi người và vô cùng khiêm tốn, tìm thấy được sự can đảm để đưa ra bài giảng thách thức Kant, nhà tư tưởng có tầm ảnh hưởng bất khả xâm phạm nhất trong số những tư tưởng gia của thời kì Khai sáng? Bài giảng này có thể chẳng gây ra vấn đề gì quá lớn với những người nghe là các nhà toán học thuần túy, nhưng hôm đó trong số những người nghe còn có các triết gia. Trong một cuốn sách có ảnh hưởng gần đây, *Từ tài hoa đến vĩ đại*[101], nhà tư vấn quản lí người Mĩ Jim Collins và một nhóm nghiên cứu chỉ rõ tám tập đoàn lớn luôn trội hơn các công ti khác. Họ thấy rằng tất cả đều

---

Many Dimensions, giới thiệu và ghi chú bởi I. Stewart (Cambridge, MA.: Perseus, 2002).

[101] J. Collins, *Good to Great: Why Some Companies Make the Leap... and Others Don't* (HarperCollins, New York, 2001).

được lãnh đạo bởi các giám đốc điều hành khiêm tốn, có một số đặc tính cá nhân giống nhau mà Collins gọi là những đặc điểm của tài lãnh đạo bậc năm. Một trong những đặc tính đó là không có ai, ngoại trừ người thân quen, đã từng nghe nói về các nhà lãnh đạo này. Họ không xuất hiện ở trang nhất các tạp chí. Không hào nhoáng. Họ sống đơn giản và luôn cho rằng thành công của công ti họ là do may mắn. Họ rất khiêm tốn, có lòng quyết tâm và sự tập trung cao độ, và táo bạo, cho rằng thành công mà họ có được là nhờ người khác. Sự kết hợp giữa lòng khiêm tốn với tính táo bạo tột cùng và sự can đảm trong tâm thức của một người nghe khá giống với Riemann.

Riemann quyết định không xuất bản bài giảng tập sự của mình - ông là người quá cầu toàn và vất vả bận rộn: bức thư của ông gửi cho anh trai mình đã đề cập và diễn tả sự lo lắng của ông về mối liên hệ giữa toán học va vật lí. Riemann chỉ sống được hơn mười năm sau bài diễn thuyết thử việc của mình. Ông mất vào năm 1866, hơn một tháng trước sinh nhật lần thứ bốn mươi của mình, bên bờ hồ Maggiore tại Ý. Người bạn và cũng là người viết tiểu sử cho ông, nhà toán học Richard Dedekind, miêu tả những giây phút cuối cùng của ông: "Một ngày trước khi qua đời, ông lam việc dưới một cây sung, tâm trí ông đầy ắp niềm vui trước khung cảnh rực rỡ quanh mình. Cuộc đời ông dần dần kết thúc một cách nhẹ nhàng, không xung đột cũng không đau đớn... Ông nói với vợ "Hãy hôn các con." Bà lặp đi lặp lại lời cầu nguyện Chúa cùng với ông, giọng ông yếu dần... bà cảm thấy bàn

tay của ông ngày càng lạnh trong tay mình, và sau một vài hơi thở dài cuối cùng, trái tim tinh khiết, nhân hậu đó đã ngừng đập. Tâm hồn cao quý được vun bồi trong ông từ ngôi nhà của cha mình đã đồng hành cùng ông suốt cả cuộc đời, và ông phục vụ Chúa một cách nhiệt thành cũng như cha của ông - nhưng theo một cách khác."[102]

Mỗi thời khắc lại có những ý tưởng xuất sắc. Có lẽ Riemann sẽ luôn khiến cho nhiều thế hệ các nhà toán học trên khắp thế giới phải bận rộn. Thật đáng ca ngợi sự kết hợp kì diệu của các mối nhân duyên cho phép trí tuệ của một con người mà trước đó rất ít người biết đến như Riemann phát triển. Các mối nhân duyên đó là hệ thống giáo dục Đức, trong đó đỉnh cao là các trường đại học nghiên cứu Đức, và cả tầm nhìn xa đáng chú ý của các cá nhân ngoài hệ thống các trường đại học, như anh em Humboldt và Crelle - những người đã dùng tâm sức, tài chính để nuôi dưỡng các tài năng xuất chúng. Nếu không có sự khích lệ của Humboldt, Dirichlet sẽ không có một vị trí ở Đức; nếu không có ảnh hưởng của Dirichlet, nhận thức toán học trong Riemann có thể đã khác. Nếu chúng ta hiểu được rằng khám phá trong toán học có tính nhân bản sâu sắc, thì có thể chúng ta phải thừa nhận thực tế là những kiến thức toán học đẹp đẽ như vậy có thể nảy sinh nhờ sự giao thoa của hàng loạt sự tình cờ. Sẽ không quá khi nói rằng, chắc chắn hàng trăm thanh niên của cuộc sống hôm nay đang có năng khiếu như Riemann, nhưng

---

[102]- B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, 3rd ed., von Heinrich Weber (Leipzig: B. G. Teubner, 1892), 541-58

họ sẽ không thể bộc lộ hết khả năng tiềm ẩn của mình chỉ vì thiếu cơ hội.



Hình 39. Chân dung Bernhard Riemann.

9

Klein và Poincaré

Poincaré sinh năm 1854, hai tuần trước bài giảng tập sự cực kì hệ trọng của Riemann. Cho đến cuối những năm hai mươi tuổi, Poincaré hầu như chẳng biết gì về Riemann. Không hề gì. Vì ở thời điểm đó, những ý tưởng của Riemann đã bắt đầu tương tác với những ý tưởng của những nhân vật khác và đã xâm nhập vào hầu hết các lĩnh vực toán học, mặc dù ở những địa điểm khác nhau, tại các thời điểm khác nhau và với các mức độ khác nhau. Ảnh hưởng của Riemann có tác động cả ở cấp độ phong cách lẫn bản chất. Ông tìm kiếm tri thức, không chỉ thông qua tính toán, mà còn qua tư tưởng, bằng cách truy ra các khái niệm đúng.[103] Cảm hứng của ông dường như xuất phát từ một sự suy tưởng sâu thẳm và không lời về hình học, vật lí, và triết học; ông dã biến đổi mọi lĩnh vực của toán học mà trí tuệ luôn lao động không ngừng nghỉ của ông chạm đến. Sau Riemann, chẳng ai chất vấn liệu ta có

[103] Người ta đồn rằng công trình của Riemann hoàn toàn rất khái quát. Nhưng sổ ghi chép của Riemann chứa đựng một khối lượng đồ sộ các tính toán.

cần đến những ý tưởng hình học và topo học hay không để hiểu sâu hơn về giải tích. Cũng chẳng còn nữa những hoài nghi nghiêm túc rằng số phức có tầm quan trọng hơn nhiều, chứ không chỉ là một cách viết tắt thuận tiện. Số chiều cao hơn và các dạng hình học khác nhau đã trở thành các thực tế toán học trung tâm có một ý nghĩa sâu sắc trong cách thức suy nghĩ của chúng ta về thế giới.

Nếu công trình của Riemann đánh dấu sự mở đầu các ngành của toán học đương đại, sự qua đời của ông trong năm 1866 báo trước bình minh của kỉ nguyên chính trị hiện đại. Trong suốt cuộc đời của ông, chủ nghĩa dân tộc nổi lên như một lực lượng mạnh mẽ và châu Âu bắt đầu tổ chức lại những hướng phát triển mà chúng ta có thể đã nhận ra ngày hôm nay. Đế quốc một thời hùng mạnh Hapsburg bắt đầu tan rã. Bán đảo của người Ý về cơ bản đã thống nhất lại vào giữa thập kỉ 1860. Tại Đức, sự thất bại của cuộc cách mạng 1848 đã có những tác động mà rốt cuộc được chứng minh là cực kì thảm khốc. Những người bảo thủ, chẳng hạn như Otto von Bismarck[104] - một sinh viên luật tại Göttingen trong vụ bãi nhiệm bảy giáo sư Göttingen, đã hợp nhất quyền lực ở nước Phổ và tạo lập một nhà nước quân phiệt công khai chuẩn bị chiến tranh với Pháp ngay từ năm 1850. Chiến thuật ngăn ngừa sự thống nhất của nước Đức bằng bất cứ giá nào của người Pháp đã đem lại kết quả trái ngược, càng làm tăng cảm tình của đại đa số người Đức đối với sự thống nhất.

---

[104] Bismarck không chỉ là một người cực kì bảo thủ. Ông là người đã có công tạo ra mạng lưới an sinh xã hội của thời hiện đại.

Phổ đánh bại Áo hoàn toàn trong cuộc chiến tranh Áo-Phổ năm 1866 và gạt bỏ nó khỏi liên bang Đức. Điều này cho phép sự tái sáp nhập về lực lượng vũ trang của một số bang của Đức với Phổ. Khi Riemann đi Italia lần cuối, Phổ chỉ vừa mới xâm lược Hanover, sáp nhập nó vào. Bismarck, sau này là thủ tướng, đã lôi kéo được Pháp tuyên chiến với Phổ vào năm 1870. Cuộc chiến tranh này, mà ngày nay gọi là chiến tranh Pháp-Phổ, diễn ra trong thời gian ngắn, đẫm máu và tàn bạo. Quân đội Phổ đã đánh tan đội quân kiêu ngạo và chuẩn bị một cách yếu kém của Pháp trong trận chiến Sedan. Hoàng đế Napoleon III bị bắt làm tù binh và buộc phải thoái vị. Paris bị vây hãm. Gần 200.000 binh sĩ đã thiệt mạng, trong đó 80% là người Pháp, và 250.000 người bị thương.

Sự nhận thức rằng chính người Pháp là những kẻ xâm lược đã thống nhất nước Đức. Như một phần của cái gọi là tiến trình hòa bình, đế chế Đức mới được thành lập tuyên bố chủ quyền tại Versailles. Vua Wilhelm IV nước Phổ trở thành Hoàng đế Wilhelm Đệ nhất của đế chế Đức và mục tiêu của những cuộc cách mạng năm 1848 cuối cùng đã đạt được - như nhận xét đầy hài lòng của Bismarck - "bằng máu và sắt thép." Cái giá phải trả là thảm họa trong nửa đầu thế kỉ 20.[105]

Sự kiêu ngạo của nước Đức trong mọi lĩnh vực ngày càng tăng lên. Phổ, vốn khoan dung kẻ bại trận trước đó -

---

[105] Đổ lỗi Bismarck gây ra Thế chiến I là không công bằng. Hoàng đế Wilhelm II, người đã sa thải Bismarck ngay sau khi lên nắm quyền, có lỗi nhiều hơn.

Áo đã đòi hỏi Pháp thanh toán những chi phí tái thiết nặng nề, điều này tạo ra nhiên liệu cho sự bùng nổ của kinh tế Đức. Sự nổi lên của các trường đại học nghiên cứu Đức đã chuyên nghiệp hóa đội ngũ giáo sư, và làm tăng khoảng cách trí tuệ giữa các ngành học thuật với nhau và giữa từng ngành với những lĩnh vực giáo dục phổ thông. Bộ trưởng Bộ Giáo dục Phổ, Friedrich Althoff (1839-1908), là một nhà quản trị tài năng và đặc biệt có ý thức xây dựng vững mạnh nền toán học Đức.

Không chỉ ở Đức, nhiều nhà toán học tài năng còn có mặt ở những nơi khác. Sự phát triển thịnh vượng và những phong trào yêu nước đã có tác dụng tốt với toán học. Ở Ý, một số nhà hình học rất giỏi xuất hiện. Paris vẫn là thủ đô trí tuệ của cả thế giới. Các trường đại học của Anh tiếp tục để lại dấu ấn, không phải thông qua các trường phái mà nhờ vào các cá nhân kiệt xuất. Tình hình cũng tương tự với các nước Scandinavia. Nga vốn có một truyền thống toán học mạnh mẽ và truyền thống này vẫn tiếp tục đi lên. Nước Mĩ vừa nổi lên sau cuộc nội chiến thảm khốc, đang trải nghiệm sự nóng bỏng của lợi ích đến từ các ngành nghiên cứu hàng đầu.

Tuy nhiên, nước Đức vẫn chưa có đối thủ. Các cơ sở nghiên cứu của Đức đang ở đỉnh cao, lúc đó đang ý thức được sự xuất sắc của riêng họ. Sự kết hợp của tính cạnh tranh, tầm nhìn của bộ phận quản lí trung ương, và một đội ngũ giáo sư chuyên nghiệp và chuyên tâm vào nghiên cứu đã sản sinh ra các công trình đặc biệt có chất lượng cao. Tầm cỡ khoa học của các trường đại học Đức vượt xa những nước khác. Khoa toán của hầu hết các

trường đại học như Leipzig, Halle, Konigsberg, Bonn, Erlangen - được điều hành bởi các giáo sư mà tên tuổi vẫn còn được nhớ rõ tới ngày nay. Hai trường đại học lớn nhất là Berlin và Göttingen. Berlin có lợi thế là có các trường ở gần nhau, và một thành phố khổng lồ. Nhưng Göttingen, trường đại học của Gauss, Dirichlet, và Riemann, phát triển mạnh và vượt trội hơn mọi mong đợi. Dưới tầm nhìn xa trông rộng và sự quản lí tài năng của Felix Klein - va những người mà ông bổ nhiệm, như David Hilbert - và những người kế nhiệm của Klein như Richard Courant, Göttingen đạt được vị thế gần như là huyền thoại.[106] Đặc biệt, Klein đã nhìn nhận rằng, sự phát triển của toán học theo tinh thần của Riemann như là một niềm tin thiêng liêng sinh ra trong cấu trúc rất nhân tạo của các trường đại học.

FELIX KLEIN

Felix Klein, con trai viên thư ký của người đứng đầu chính phủ Phổ, sinh tháng 4 năm 1849, khi cuộc cách mạng Đức đã bị đánh bại. Cao lớn, đẹp trai, quảng giao,

---

[106] Để tìm hiểu thêm Göttingen cuối thế kỉ 19, đầu thế kỉ 20, xem cuốn tiểu sử *Hilbert* của C. Reid (New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1970) và *Courant in Göttingen and New York. The Story of an Improbable Mathematician* (New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976). Nhiều thông tin còn nằm trong bài báo D. E. Rowe "Klein, Hilbert and the Gottingen Mathematical Tradition", *Osiris* 5, no. 2 (1989): 186-213 và "'Jewish Mathematics' at Gottingen in the Era of Felix Klein", *Isis* 77 (1986): 422-49.

am hiểu về xã hội, ông là một nhà lãnh đạo bẩm sinh và nhanh chóng được đánh giá là một trong những nhà toán học hứa hẹn nhất của thời đại. Ông có mặt ở Paris khi chiến sự nổ ra năm 1870. Ông vội vã trở về và tham gia vào quân đoàn Phổ với vai trò là một nhân viên quân y. Trong quân đội, ông phục vụ cho bộ trưởng giáo dục tương lai của Phổ là Althoff, và hai người rất quý trọng nhau. Sau một thời gian ngắn tạm trú tại Göttingen sau chiến tranh, ông được bổ nhiệm làm giáo sư toàn năng tại Đại học Erlangen ở độ tuổi 23 - lúc gần như chưa được ai biết đến. Ba năm sau đó, vào năm 1875, ông chuyển đến gần Munich, kết hôn, làm việc tại Leipzig vào năm 1880, và trở về Göttingen vào năm 1886.

Giống Riemann, Klein nghiên cứu lí thuyết hàm số, đồng thời quan tâm mạnh mẽ đến hình học và topo học. Để chuẩn bị cho lễ nhận học hàm giáo sư toàn năng, ông đã phác thảo một chương trình nghiên cứu. Phác thảo đó, sau này được gọi là chương trình Erlangen,[107] đưa ra một viễn cảnh mang tính đột phá của hình học với một trọng tâm khác với hình học của Riemann. Một trong những khái niệm dễ tiếp thu của Riemann, đó là việc ta phải xác định ý nghĩa của một đường thẳng, và cách định

[107] Bản tiếng Đức được in trong một cuốn sách nhỏ không dễ tìm thấy. Tuy nhiên, nó đã được tái bản, bản dịch tiếng Ý và Pháp được tiến hành và xuất hiện trong các tạp chí lớn. Bản dịch tiếng Anh bởi M. W. Haskell, "A Comparative Review of Recent Researches in Geometry", xuất hiện trong *Bulletin of the New York Mathematical Society* 2 (1893): 215-49 và được in lại trong D. G. Saari (ed.), *The Way It Was: Mathematics from the Early Years of the Bulletin* (Providence: American Mathematical Society, 2003).

nghĩa nó như thế nào là quan trọng. Điều này, trên thực tế, đã được chỉ ra hơn một nghìn năm trước đó bởi Proclus trong bài bình luận của ông về Euclid. Sự đồng nhất đường thẳng với đường trắc địa của Riemann chỉ là định nghĩa hợp lí từ quan điểm của những cư dân sống trong một không gian: đường nào không phải là đường trắc địa thì sẽ không thẳng đối với họ. Ngay cả người Hi Lạp ở Alexandria cũng đã biết nhiều như vậy (và họ biết rằng các đường trắc địa song song không tồn tại trong một số không gian, và tồn tại nhưng chưa chắc là duy nhất ở một số không gian khác). Tuy nhiên, nhiều người cảm thấy định nghĩa hình học của Riemann đã quá ôm đồm: nếu không gian có một métric, thì sẽ có một đường trắc địa đi qua mọi điểm theo mọi hướng. Có khác nào hình học luôn là đặc biệt, đối xứng, và đẹp hay sao? Nói rằng một mặt cầu tròn mang trên nó một dạng hình học là một chuyện, nhưng nói rằng một mặt sần sùi như vỏ củ khoai tây cũng giống như vậy thì lại là chuyện khác.

Đối với Klein, các dạng hình học phản ánh những sự đối xứng; và các đối tượng hình học, đặc biệt là đường, là những đối tượng vẫn giữ nguyên trạng dưới tập hợp các phép biến đổi được thiết lập theo quy định nào đó. Quan điểm này có sự liên hệ chặt chẽ đến *đại số* - theo đúng nghĩa mà các nhà toán học hiểu về từ này - cụ thể là bộ môn nghiên cứu về các tập hợp chứa một hoặc nhiều phép tính.[108] Một tập hợp chỉ chứa một phép tính duy

---

[108] Ví dụ như phép tính cộng của số nguyên, phép tích hợp của đồng phôi không gian, phép hoán vị của chữ cái của một từ. Lí

nhất và tuân theo vài tiên đề nhất định được gọi là một *nhóm.* Tập hợp tất cả các phép biến đổi một-một từ một không gian lên trên chính nó có một phép tính tự nhiên: nếu chúng ta thực hiện một phép biến đổi, sau đó một phép khác, ta sẽ có một phép biến đổi thứ ba có thể được xem như là *tích* của hai phép biến đổi. Tương tự, phép tính hủy bỏ một phép biến đổi có thể được xem như một phép biến đổi khác, gọi là *nghịch đảo* của phép biến đổi ban đầu.

Nếu một tập hợp mà trong đó nghịch đảo của bất kì phép biến đổi nào, hay tích số của bất kì hai phép biến đổi nào cũng nằm trong tập hợp đó, thì tập hợp đó là một nhóm, và chính những tập hợp như vậy là các tập hợp đáng quan tâm nhất. Chương trình Erlangen của Klein đấu tranh cho quan niệm rằng hình học là ngành nghiên cứu các đối tượng bất biến của các nhóm có các phần tử là các phép biến đổi. Một nhóm các phép biến đổi khác trên một không gian cho ra một dạng hình học khác. Những nhóm đến từ các dạng hình học đơn giản nhất đầu tiên

---

thuyết nhóm là một ngành con của đại số mà đối tượng nghiên cứu là nhóm. Ta không nên ấn tượng rằng mỗi tập hợp có một phép tính duy nhất trên các phần tử của nó là một nhóm. Ngoài ra còn có các tập hợp khác với một phép tính duy nhất đáp ứng các tiên đề khác nhau (nửa nhóm (semigroups), nửa nhóm mônôit (monoids), giả nhóm (pseudogroups)) đáng quan tâm. Ta cũng nghiên cứu các tập hợp có hơn một phép tính toán. Phụ thuộc vào các tiên đề mà hai phép tính thỏa mãn và cách chúng liên hệ với nhau, ta có thể thu được vành (ring), trường (field), mô-đun (module), giàn (lattice), và các cấu trúc khác. Bực mình thay, từ đại số cũng được dùng để chỉ một lớp vành đặc biệt (vì vậy một đại số là một ví dụ cụ thể của một lớp cấu trúc mà đại số nghiên cứu).

được nghiên cứu bởi một người bạn của Klein là Sophus Lie. Các không gian có tính đối xứng một cách tối đa đối với các nhóm đơn giản nhất trong số các nhóm này hóa ra lại có quan hệ với các không gian mà trong đó độ cong là không đổi. Tất cả thật rõ ràng.



Hình 40. Felix Klein.

Các quan điểm của Klein và Riemann dĩ nhiên không phải là những quan điểm duy nhất. Những nhà toán học khác, đặc biệt là Hilbert, cảm thấy rằng không cần phải

định nghĩa điểm hay đường thẳng, mà nên có một nhóm các tiên đề đơn giản và hợp lí đặc trưng cho hình học Euclid. Ta có thể suy nghĩ đến hình học Riemann theo hướng đại số nhiều hơn, nhưng với các đối tượng đại số này, người ta đã phải chờ cho đến nửa sau của thế kỉ 20.[109]

Cho đến năm 1880, Klein đã làm cả thế giới phải theo sau. Là một giáo viên bậc thầy và giảng viên kiệt xuất, ông thu hút một số lượng lớn sinh viên tài năng đến Leipzig. Ông mở rộng công trình của Riemann về lí thuyết hàm số, nghiên cứu các hàm số bất biến dưới tác động của các nhóm chuyển động của mặt phẳng phức. Klein không thể không tự tưởng tượng về chính mình như là người kế thừa trí tuệ của Riemann. Cho đến đầu năm 1881, Klein bắt gặp ba ghi chú ngắn của Henri Poincaré, có tựa đề *Về các hàm số Fuchs* trong kỉ yếu của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp.[110] Chàng trai này là ai? Một người Pháp ư? Ở vùng Caen hẻo lánh so với tất cả mọi nơi. Tại sao Klein lại chưa nghe nói gì về anh chàng này? Làm thế nào Poincaré đạt được những kết quả này? Và anh ta đang làm gì với việc đặt tên cho các hàm số mà Klein quan tâm sâu sắc theo tên của Lazans Fuchs (1833-1902) - một Giáo sư tại Heidelberg, người mà gần như không có được thành tựu nhiều như một số đồng nghiệp thân cận của Klein?

---

[109] Ta cần đến giả nhóm và bó nhóm (sheaves of groups) thay vì nhóm.

[110] "Sur les functions fuchsiennes", *Comptes rendus de l'Academie des sciences* 92 (14 Feb 1881): 333-35: 92 (21 Feb 1881): 395-96; 92 (4 Apr 1881): 859-61.

Klein ngay lập tức viết thư cho ngôi sao đang lên này. Sau đó, điều tương tự không đến với Klein nữa: không bao giờ ông còn tỏa sáng một cách rất rực rỡ trong thế giới của riêng mình. Bởi vì ông đã phát hiện ra trong Poincaré người thừa kế thực sự của trí tuệ Riemann. Trớ trêu thay, người thừa kế này gần như không biết gì về công trình của Riemann, và anh ta rõ ràng không phải là một người Đức.

HENRI POINCARÉ

Trái ngược với Riemann, gia đình Poincaré rất giàu và có địa vị rất cao. Henri sinh ra ở nhà ông nội,[111] ngôi nhà vốn là một khách sạn nằm giữa trung tâm của thành phố lịch sử Nancy nước Pháp. Ngôi nhà cao bốn tầng, với một cầu thang ở giữa và một sân vườn trung tâm hướng ra cửa. Nó chỉ cách một đoạn đường so với chiếc cổng Craffe - cổng vòm và là kì quan xây dựng từ thế kỉ 14 mà giới quý tộc địa phương, các công tước xứ Lorraine, đi qua trước khi nhận tước vị đáng kính trọng của họ. Ở bên kia đường so với nhà Poincare là nhà thờ nơi các công tước được chôn cất. Cách đó một vài dãy nhà ngắn là đường phố, bên trái là quảng trường Stanislas tráng lệ, quảng

[111] Chỉ hết tiểu sử cuộc đời Poincaré thì có sẵn nhưng không có tiểu sử phê bình nào về Poincaré là tốt cả. Xem một số suy đoán thú vị về lí do tại sao lại như vậy trong Heinzmann, "Éléments preparatoires à une biographie d'Henri Poincaré". Bài viết của Heinzmann chứa đựng một kí họa tuyệt vời tuổi thơ của Poincaré, với các nguồn tham khảo cẩn thận.

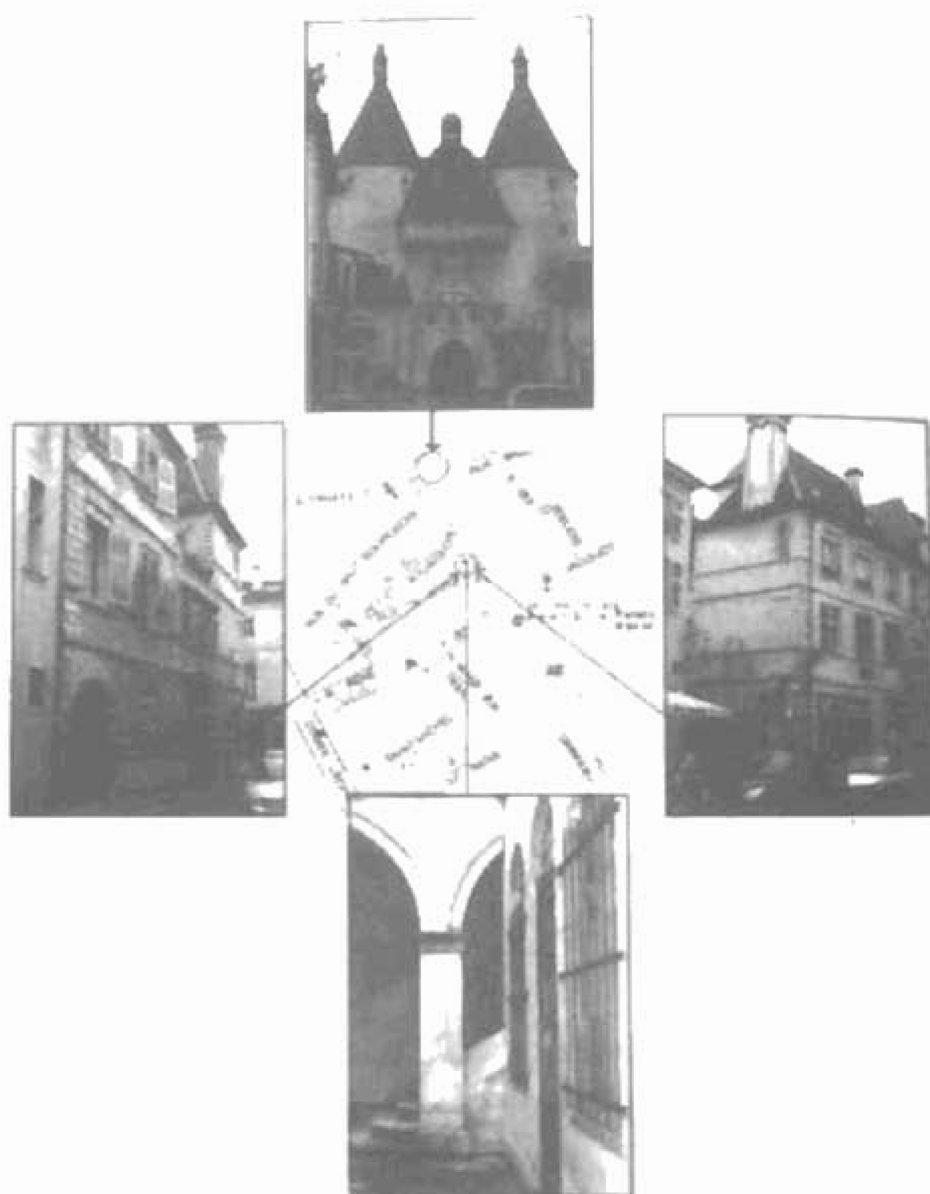
trường mang phong cách baroque tuyệt đẹp được xây dựng bởi Stanislas Leszczynski, đức vua bị hạ bệ của nước Ba Lan, và là cha dượng của nhà vua Pháp Louis XV. Cha của Poincaré, Léon, là một nhà vật lí giảng dạy tại trường y thuộc Đại học Nancy. Anh trai của Léon, Antoni, liên tiếp đảm nhiệm một loạt các chức vụ rất cao mang tính kĩ thuật trong ngành xây dựng dân dụng của nhà nước (một trong những việc đó là vị trí đứng đầu trong ngành đường sắt của khu vực Paris và phụ trách hệ thống thủy lợi của toàn nước Pháp). Hai người con trai của Antoni, những người anh em họ đầu tiên của Poincaré, đạt đến những vị trí công chức thậm chí còn cao hơn: Raymond Poincaré trở thành Tổng thống của nước Cộng hòa Pháp,[112] và người em Lucien, là giám đốc của toàn bộ hệ thống giáo dục trung học, sau đó là nền giáo dục hậu-trung học của Pháp, và sau đó là hiệu phó trường Đại học Paris.

Mặc dù có xuất thân tư sản sang trọng, Poincaré cũng không tránh được những tai ương ập đến. Lần mắc bệnh bạch hầu khi năm tuổi đã làm ông không thể đi lại và nói được trong vòng chín tháng. Sau đó ông lại yếu ớt, có thể điều này giải thích cho thái độ hơi thờ ơ mà người ta phát hiện ra giữa Poincaré và người cha cường tráng của mình. Sự giáo dục thuở nhỏ của Poincaré cũng như của em gái ông, Aline, nằm trong tay của người mẹ, và có thể được mô tả chỉ bằng hai chữ "bình dị". Gia đình thường ra ngoài dạo chơi hai lần một tuần trong một nhóm lên đến hai mươi

---

[112] Raymond Poincaré (1860-1934) là thủ tướng từ năm 1912 đến 1917, từ 1922 đến 1924, và từ năm 1926 đến 1929. Ông là Tổng thống từ năm 1913 đến 1920.

người, và Poincaré có thể tiếp cận với rất nhiều người lớn có suy nghĩ sâu sắc. Các kì nghỉ gia đình ở Frankfurt, Paris đô hội, dãy Alps, và London là một phần thời thơ ấu của ông, cũng như những kì nghỉ mùa hè và Phục Sinh dài ngày ở nhà ông bà ngoại tại Annecy. Aline kể về những kì nghỉ ở nhà ông bà ngoại như là khoảng thời gian hạnh phúc nhất trong thời thơ ấu của họ.



Hình 41. Nơi Poincaré sinh sống.

Gaston Darboux, người luôn thần tượng ông, kể về các trò chơi giàu trí tưởng tượng mà họ chơi tại Annecy, như việc xây dựng một hiến pháp tưởng tượng cho một đế chế ảo.

Theo tất cả những thông tin để lại, cậu bé Poincaré lịch thiệp, lơ đãng dường như là một nguồn gây kinh ngạc với các bạn cùng lớp và các giáo viên. Ông thuận cả hai tay, cận thị nặng, và sự phối hợp giữa tay và mắt cũng là một thử thách đối với ông, rất có thể là kết quả của cơn bệnh tê liệt trước đó. Tuy nhiên, ngoại trừ vẽ, việc học ở trường thật nhẹ nhàng đối với ông, và ông rất xuất sắc trong tất cả các môn. Một trong những giáo viên đầu tiên của ông nói với mẹ ông rằng ông sẽ là một nhà toán học vĩ đại, và viết rằng Poincaré là "một quái vật toán học". Em gái mô tả ông như bị chôn vùi trong đống sách, nhưng chẳng bao giờ có vẻ là đang làm việc cả. Theo bà, mẹ đã bảo vệ ông khỏi những sự mất tập trung đến từ cuộc sống hằng ngày. Trên đường từ trường về nhà, ông đã hoàn thành bài tập ở nhà của mình trong đầu. Nhiều năm sau, các bạn cùng lớp vẫn kể lại cảnh Poincaré moi trong túi ra một tờ giấy vô cùng nhàu nhĩ, đó chính là bài tập về nhà của ông. Ông dường như chẳng bao giờ ghi chép, thường có vẻ như đang nghĩ xa xăm và đang bị lạc trong chính suy nghĩ của mình. Ông có một bộ nhớ gần như là máy ảnh, dễ dàng nhớ lại từng trang chính xác và vị trí của những điều mà ông đã đọc từ nhiều năm trước.

Poincaré điềm đạm và tốt bụng. "Anh ấy rất cân bằng, không bao giờ để lộ bất kì sự tức giận, bất kì cảm xúc, hay bất kì sự đam mê trước bất cứ thứ gì. Tình cảm sâu sắc nhất là những thứ mà anh giấu một cách cẩn

trọng nhất", em gái ông đã viết. "Trong cách đánh giá người khác của anh," bà nói tiếp, "anh tránh tất cả mọi sự cường điệu. Anh từ chối nói rằng một ai đó là rất tốt, hoặc rất xấu, bởi vì anh không tin vào sự tuyệt đối, đặc biệt là trong các vấn đề mang tính đạo đức."[113]

Cuộc chiến tranh Pháp-Phổ đóng một vai trò quyết định trong những năm cuối thời thiếu niên của Poincaré. Cách chưa đầy năm mươi dặm từ biên giới của nước Đức hiện tại, thành Nancy nằm ngay giữa trung tâm của cuộc chiến. Darboux, người đứng đầu Viện Hàn lâm Khoa học Pháp và là một nhà hình học tuyệt vời dựa vào chính thực lực của mình, đã mô tả phản ứng kinh hãi của Poincaré khi nhà cửa của gia đình bên ngoại của ông ở phía ngoài Nancy bị phá hủy, và trích dẫn một đoạn tường thuật từ một người bạn của gia đình mô tả chàng trai trẻ Poincaré giúp cha mình chăm sóc những người bị thương như thế nào.[114] Nancy rơi vào tay quân Phổ, và bị chiếm đóng từ năm 1870 đến 1873, trong thời gian này có một quan chức cao cấp của Đức tạm trú tại nhà của Poincaré. Đó là quãng thời gian mà Poincaré học tiếng Đức.[115]

---

[113] Sổ ghi chép của em gái Poincaré, Aline, Item B 250, *Documents sur Poincaré*, Archive Henri-Poincaré, Université Nancy 2 (LPHS-AHP), trang 191. Trích lại trong G. Heinzmann, "Éléments preparatoire à une biographie d'Henri Poincaré."

[114] Gaston Darboux, "Éloge Historique d'Henri Poincaré", đọc trong một buổi diễn thuyết công cộng vào tháng 12 năm 1913, in lại trong *Oeuvres de Henri Poincaré*, vol 2 (Paris: GauthiersVillars, 1952).

[115] Có khác biệt thú vị trong thông tin của Darboux cho rằng Poincaré siêng năng học tiếng Đức bằng cách đi xuống quán cà phê để có thể đọc báo tiếng Đức và kể lại với cha mình cùng những người khác những gì đang diễn ra, và thông tin của em gái

Sau chiến tranh, Nancy về lại tay người Pháp. Metz, thành phố anh em của nó, một thành phố thiên về công nghiệp nặng, cách ba mươi dặm phía trên sông Moselle, vẫn nằm trong tầm kiểm soát của Đức và trở thành một phần của vùng thuộc Đức quản lí, vùng Alsace-Lorraine, cho đến sau Thế chiến I. Nancy, lúc bấy giờ nằm trên đường biên giới, phát triển thịnh vượng thành một thị trấn biên giới sống động, tràn ngập những nghệ sĩ và người tị nạn chạy trốn khỏi Alsace và chính sách Đức hóa. Là thành phố có nhiều nét văn hóa La Mã nhất ở phía Đông nước Pháp, vào cuối thế kỉ 19, Nancy trở thành một ngọn hải đăng của nền văn hóa và văn minh Pháp. Công nghiệp, nghệ thuật, và văn hóa nở rộ, đã sản sinh phong trào Nghệ thuật Mới (Art Nouveau), lan rộng về phía tây từ Nancy qua Paris, và từ đó truyền ra khắp nước Pháp.

Một trong những di sản sót lại của Napoleon là hệ thống đặc trưng Pháp của các *trường lớn* (grandes écoles), các trường học ưu việt đào tạo các nhà quản lí và kĩ thuật hàng đầu của đất nước - đến tận ngày nay.[116] Tiểu sử các

---

Poincaré cho rằng ông học được tiếng Đức bởi vì người Đức khi tạm trú với gia đình luôn ngồi ở chỗ ấm nhất của phòng khách. Không được nhắc đến, nhưng khó có thể bỏ lỡ, là đánh giá hơi gay gắt của cô cho rằng Poincaré sẽ học bất cứ điều gì nếu điều đó đồng nghĩa với việc chia sẻ chỗ ấm trong căn phòng.

[116] *Trường lớn* là một hệ thống gồm 160 trường đại học nhỏ được tài trợ tốt với chương trình giảng dạy được chọn lựa cẩn thận. Các trường này có một tỉ lệ sinh viên-giáo viên rất cao (160 trường đại học có khoảng 11.000 sinh viên tốt nghiệp mỗi năm), học phí vừa

nhà toán học Pháp thường được bắt đầu với thông tin đáng nể là họ đã thi tốt như thế nào trong các bài thi tuyển đầu vào, hay họ đã biểu hiện ra sao qua các kì thi và các cuộc tranh tài cấp quốc gia. Poincaré cũng không là ngoại lệ. Ông đoạt giải nhất trong nhiều kì thi quốc gia, và là một trong những thí sinh sáng giá nhất của trường Bách khoa (École Polytechnique) và trường Sư phạm (École Normale Supérieure) của Paris, những trường đặc biệt nổi tiếng về chất lượng toán học.

Poincaré vào trường Bach khoa Paris năm 1873, tốt nghiệp ở vị trí thứ hai (bởi vì điểm môn thể dục và nghệ thuật của ông hơi thấp hơn một chút so với mức trung bình) vào năm 1875. Sau đó ông học tiếp tại trường Mỏ (Ecole des Mines), một trường lớn dành cho ngành học kĩ thuật cổ xưa nhất, và vì vậy danh giá nhất. Sau khi tốt nghiệp, ông bắt đầu với sự nghiệp kĩ sư mỏ, ngắn ngủi nhưng xuất sắc, trong thời gian đó ông hoàn thành luận án tiến sĩ với sự hướng dẫn của Charles Hermite.

Những người chấm luận án của Poincaré không hoàn toàn hứng thú với luận án của ông.[117] Họ thừa nhận kết

---

phải, và đầu vào thì cạnh tranh rất cao dựa trên các kì thi tuyển quốc gia bằng giấy, đôi khi bằng phỏng vấn. Các trường này cung cấp gần 70% quản trị viên và giám đốc trong các công ti Pháp, và tỉ lệ này trong nhà nước thậm chí còn cao hơn.

[117] Vài năm sau đó, Darboux, Chủ tịch của Ủy ban giám khảo luận án viết, "Từ cái nhìn đầu tiên, tôi đã rất rõ ràng rằng nó không phải là bình thường và đáng được khen thưởng. Chắc chắn là kết quả của nó đủ để cung cấp tài liệu cho nhiều luận án tốt." (lời ca tụng của Darboux, trích dẫn trong ghi chú 101, 21.).

quả của ông là phong phú, độc đáo, nhưng không hài lòng với phần trình bày có phần cẩu thả của Poincaré, đặc biệt là đoạn cuối. Các chứng minh còn những lỗ hổng và bản thảo có dấu hiệu của việc viết vội vàng. Người đứng đầu hội đồng thẩm định luận án, Darboux, thói thúc ông tiếp tục phát triển một số ý tưởng của mình và trình bày mạch lạc hơn. Poincaré nghiêm túc sửa chữa bất kì lỗi nào mà hội đồng này nhắc đến, nhưng từ chối tiếp tục phát triển các ý tưởng, nói rằng ông có quá nhiều thứ khác để suy nghĩ. Darboux tôn trọng điều này, và do đó ông vượt qua kì sát hạch.

Với bằng tiến sĩ trong tay, Poincaré tìm được một vị trí trợ lí giáo sư tại Đại học Caen vào tháng 12 năm 1879. Làm việc ở tỉnh lẻ là khởi đầu quen thuộc của một sự nghiệp mang tính học thuật ở Pháp. Caen là một thành phố nhỏ, thủ phủ của Calvados, vùng Normandy, vùng nổi tiếng với rượu táo trứ danh và pho mát hảo hạng. Có tiếng với các toà lâu đài theo kiến thúc Norman, và đặc biệt là pháo đài hùng vĩ của William-nhà-chinh-phạt (William the Conqueror) có niên đại từ 1060, Caen chỉ cách bờ biển Normandy độ mười dặm. Trường Đại học Caen[118] được thành lập năm 1432 bởi vua Henry VI của Anh, sau này hoàn toàn bị phá huỷ bởi các trận không kích liên quan đến cuộc đổ bộ của quân đồng minh lên Normandy năm 1944.

---

[118] Trường được xây dựng lại sau chiến tranh, và khánh thành vào năm 1957

Tình cờ, năm 1878, Viện Hàn lâm Khoa học Pháp công bố một cuộc thi "để cải thiện đáng kể một vài khía cạnh của lí thuyết phương trình vi phân tuyến tính một biến độc lập." Poincaré khá quen thuộc với một vài công trình của Lazarus Fuchs, đồng tác giả với thầy hướng dẫn luận văn của ông về một lớp các hàm số biến phức phát sinh trong mối quan hệ với các nghiệm của những phương trình vi phân. Poincaré đã tự hỏi, liệu các hàm số tương tự có tồn tại trong các bối cảnh toán học khác không. Cuối tháng 5 năm 1880, Poincaré gửi bài luận của



Hình 42. Henri Poincaré.

minh để dự thi. Một thời gian ngắn sau đó, ông nhận ra rằng các hàm số này có mối quan hệ với hình học Phi-Euclid.

"Trong vòng hai tuần," ông viết, "tôi đã cố gắng chứng minh rằng không thể có bất kì hàm số nào là tương tự với những gì mà lúc đó tôi gọi là các hàm số của Fuchs. Lúc đó tôi đã quá ngu dốt."[11] Ông tiếp tục mô tả làm thế nào mà sau một đêm không ngủ do một tách cà phê đặc lúc tối, ông phát hiện ra rằng - trái ngược với những gì ông đã từng tin - tồn tại một lớp rộng lớn của các hàm số giống như vậy. Sau đó, ông tìm ra một cách thuận tiện để biểu diễn các hàm số này. Đây là bước đột phá đầu tiên. Dĩ nhiên, một điều bất ngờ thậm chí còn lớn hơn đang chờ đón ông.

> "Sau đó tôi rời Caen, nơi tôi đang sống vào thời điểm đó, để tham gia một hội nghị địa chất tổ chức bởi Trường Mỏ. Những sự việc xảy ra bất ngờ của chuyến đi này đã làm tôi quên đi công trình toán học của mình. Khi đến Coutances, chúng tôi tạm nghỉ và lái xe đi một vòng, thời điểm đặt chân lên thềm nhà, ý tưởng đó chợt đến với tôi, mặc dù chẳng có bất kì những suy nghĩ nào trước đây trong đầu tôi chuẩn bị cho nó, rằng các phép biến đổi mà tôi dùng để định nghĩa hàm số Fuchs giống hệt các phép biến đổi trong hình học Phi-Euclid. Tôi không kiểm chứng lại và cũng chẳng có thời gian để làm việc đó do

[11] Từ Poincaré, "Khoa học và Phương pháp" (Science and Method) dịch sang tiếng Anh bởi Francis Maitland. Trong *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré*, biên tập bởi Stephen Jay Gould (New York: The Modern Library, 2001), 392.

> phải trò chuyện với người khác ngay khi vừa ngồi xuống ghế, nhưng tôi đã cảm nhận một sự chắc chắn hoàn hảo và tức thời. Trên đường trở về Caen, tôi xác nhận lại kết quả trong thời gian rảnh rỗi để thỏa mãn tâm trí của mình."[120]

Điều này thậm chí còn hơn là một sự chấn động. Nhưng không phải chỉ có vậy. Poincaré đã chuyển sang một số câu hỏi về số học mà không hề nghi ngờ liệu chúng có bất kì liên hệ với những gì mà ông đã làm hay không.

> "Chán nản vì không thành công, tôi bỏ một vài ngày đi bộ bên bờ biển để suy nghĩ về những điều khác. Một hôm, khi đang đi bộ dọc theo những vách đá, ý tưởng đó đã đến với tôi, một lần nữa một cách ngắn gọn, bất ngờ, và chắc chắn tức thời, rằng các phép biến đổi của các dạng tam nguyên bất định giống hệt các phép biến đổi của hình học Phi-Euclid."[121]

Trở lại Caen, Poincaré nhận ra rằng điều này đồng nghĩa với sự tồn tại mà trước đây chưa ai tìm ra của một lớp hoàn chỉnh khác của các hàm số Fuchs. Ông đã lạc vào một thế giới thần tiên của toán học. Poincaré gửi đến Viện Hàn lâm Khoa học ở Paris ba bài bổ sung cho bài luận của mình, trong đó ông phác thảo một cách cẩn trọng mối liên hệ với hình học Phi-Euclid.[122] Ông được đề

---

[120] Trích dẫn như trên.

[121] Trích dẫn như trên.

[122] Ba bài bổ sung cho bài luận của ông gửi cho Viện Hàn lâm Khoa học ở Paris (28 tháng 6 1880; 6 tháng 9 1880; 20 tháng 12 năm 1880) vạch ra các nguyên tắc cơ bản của hình học Euclid và mối quan hệ

cử cho giải thưởng trong Viện Hàn lâm Khoa học lần đầu vào cuối năm 1880, và tháng 3 năm 1881, Viện Hàn lâm trao cho Poincaré một giải tuyên dương rất danh dự, mặc dù không phải là giải nhất.

Khám phá của Poincaré cho phép ông tiến xa hơn nữa, ông công bố các kết quả của mình trong hai bài báo ngắn gọn vào tháng 2 năm 1881, và một bài thứ ba vào mùng 4 tháng 4. Đây là những bài báo mà Klein đã lưu ý.[123] "*Sehr Geehrter Herr!*" (cách nói lịch sự và mang tính công thức trong tiếng Đức không thể bắt chước được của "thưa ông") mở đầu bức thư của ngài Giáo sư Tiến sĩ Klein gửi đến Poincaré, ngày 12 tháng 6 năm 1881:

> "Ba ghi chú của ông ở bài *Comptes Rendus* (báo cáo) mà tôi lần đầu tiên được biết vào ngày hôm qua - và tôi nhận ra rất nhanh chỉ ngay sau đó rằng nó có liên quan chặt chẽ đến những sự suy xét và các nỗ lực do chính tôi bỏ ra trong suốt những năm qua - khiến tôi cảm thấy rằng cần

---

của chúng với hàm số Fuchs. Những bài báo này bị lãng quên và mòn mỏi nằm trong kho lưu trữ Viện Hàn lâm Khoa học ở Paris cho đến khi được phát hiện lại vào tháng 12 năm 1979, chín mươi chín năm sau đó bởi Jeremy Gray, lúc đó là một sinh viên sau đại học (và bây giờ là một sử gia toán học nổi tiếng). Đối với các bài báo bổ sung, và bình luận lịch sử về chúng, xem Jeremy J. Gray và Scott A. Walter, *Henri Poincaré, Three Supplementary Essays on the Discovery of Fuchsian Functions* (Berlin: Akademie Verlag GmbH and Paris: Albert Blanchard, 1997).

[123] Vào ngày 11 tháng 4, nhà toán học nổi tiếng người Thụy Điển Mittag-Leffler, sau khi viết thư cho Hermite, đã viết cho Poincaré. Họ trở thành những người bạn suốt đời của nhau. Mittag-Leffler đã dự định xuất bản một tạp chí toán học mới và mời Poincaré xuất bản các bài viết trong đó.

> phải viết thư cho ông. Đầu tiên, tôi hi vọng ông sẽ lưu tâm đến một số công trình khác mà tôi đã xuất bản trong trong các Quyển XIV, XV, XVII của *Mathematische Annalen* về những hàm số elliptic. Đó tất nhiên là các hàm số mô-đun, chỉ là một trường hợp đặc biệt của mối quan hệ phụ thuộc mà ông đang đặt ra, nhưng một sự so sánh kĩ hơn sẽ cho ông thấy rằng tôi có lẽ đã rút ra được các đặc tính chung."[124]

Mặc dù Klein chỉ lớn hơn Poincaré năm tuổi, ông đã là một giáo sư toàn năng có địa vị vững chắc ở Đức với tầm ảnh hưởng rất lớn. Klein biết rằng Poincaré sẽ nhận ra tên mình. Ông cẩn thận ghi chú tất cả những gì ông đã công bố đồng thời chỉ rõ rằng ông cũng đã thu được một số kết quả khác - mặc dù chưa được công bố nhưng đã được thảo luận với những người khác. Tranh giành thẩm quyền đã xảy ra: Klein bày tỏ hi vọng rằng lá thư của ông sẽ là lá thư mở đầu một cuộc trao đổi kéo dài, bỏ qua danh tính một số người, giả bộ nói rằng ông sẽ không có nhiều thời gian để suy nghĩ về những vấn đề mà ông đang viết cho đến học kì sau, và giải thích một cách biện hộ rằng tiếng Pháp của ông không được tốt như mong muốn.

Poincaré đã chẳng rụt rè chút nào, "Thưa ông (Monsieur)", Poincaré trả lời hầu như ngay lập tức (15 tháng 6).

---

[124] Các bức thư được in lại trong toàn tập tác phẩm của Poincaré (*Oeuvres*, vol. 2) và của Klein. Toàn tập Poincaré bao gồm một trích dẫn dài từ cuốn *Giá trị Khoa học* (The Value of Science), và tuyển chọn từ mô tả khám phá của Klein (hơi khác từ bản 1927). Dường như không có bản dịch tiếng Anh toàn bộ cuộc trao đổi (do vậy tôi đã trích dịch ở đây và ở những chỗ khác).

"Bức thư của ông cho tôi thấy rằng ông đã kịp thoáng thấy trước tôi một số kết quả mà tôi đã đạt được trong lí thuyết về các hàm số của Fuchs. Tôi không hoàn toàn ngạc nhiên, bởi vì tôi biết ông thông thạo như thế nào về hình học Phi-Euclid - chìa khóa thật sự của vấn đề đang làm bận tâm chúng ta

Poincaré sử dụng động từ *thoáng thấy* khi nói đến các kết quả của Klein và động từ *đạt được* khi nói về các kết quả của chính mình một cách rất tinh tế, nhưng gần như không ngẫu nhiên.[125] Thử hoán đổi vị trí của chúng nếu bạn chưa cảm thấy thuyết phục. Dù có ý thức hay không, Poincaré đã đánh trúng một điểm, đó là Klein, hay tất cả những người khác, đã có tiềm năng khám phá, nhưng chưa thật sự đến nơi đến chốn. Klein chưa tìm ra được mối liên hệ với hình học Phi-Euclid. Mấu chốt nằm ở một trong những "vấn đề đang làm bận tâm chúng ta." Poincaré đã không nhường lại sân chơi cho Klein. Ông khẳng định rằng ông đương nhiên sẽ công nhận những thẩm quyền thuộc về Klein. Sau đó là một giọng văn đanh thép. "Ông nói về các hàm số mô-đun elliptic."[126] Nhưng tại sao lại là số nhiều? Nếu các hàm số mô-đun là bình phương của mô-đun được diễn tả như một hàm số của các chu kì, thì chỉ có duy nhất một hàm số. Thuật ngữ "hàm số mô-đun" hẳn phải có một ý nghĩa gì khác."

---

[125] Tôi (tác giả) đã dịch chữ *apercevoir* thành *thoáng thấy* và *obtenir* thành *đạt được*. Hai động từ có nghĩa khác nhau và cách chọn từ của Poincaré là có tính toán. Thử đảo ngược chúng nếu bạn chưa tin.

[126] *[die elliptischen Modulfunktionen]*

Tất nhiên, nó còn có nghĩa khác, nhưng tiếng Đức của Poincaré đủ tốt để nhận ra danh từ số nhiều đó, và khả năng toán học của ông thì chắc chắn như đá tảng. Bốn câu hỏi nữa tiếp theo sau, tất cả đều hiểm hóc. "Ông hàm ý gì khi nói về các hàm số đại số có thể được biểu diễn bằng các hàm số mô-đun? Ngoài ra, Lí thuyết Đa giác Cơ bản là gì?". Poincaré không e ngại đặt nghi vấn và thách thức về mặt thuật ngữ. "Ông đã tìm thấy tất cả các đa giác tuần hoàn[127] làm phát sinh một nhóm không liên tục chưa? Ông đã chỉ ra sự tồn tại của các hàm số tương ứng với mỗi nhóm không liên tục chưa?". Những điểm này tất nhiên là trung tâm của vấn đề. Poincaré đã từng không nghĩ rằng những điểm cuối cùng này tồn tại, nhưng lại khám phá ra chúng khi uống một tách cà phê đen. Poincaré kết thúc thư phúc đáp bằng cách nói rằng ông đã chuyển những nhận xét của Klein đến Picard, một trong những nhà toán học người Pháp có ảnh hưởng mà Klein đã đề cập, và nói với Klein rằng ông sẽ rất vui nếu họ tiếp tục giữ liên lạc. Và, còn nữa, "Tôi đã tự ý viết cho ông bằng tiếng Pháp bởi ông nói với tôi rằng ông biết ngôn ngữ này." Hoàn hảo. Không hoàn toàn chính xác với những điều Klein đã viết, nhưng là sự suy ra hợp lí của việc đọc chúng.

Đó là cách bắt đầu của một sự trao đổi hấp dẫn nhưng cũng không kém phần phức tạp và khinh bạc. Các bức thư cắt ngang mọi đường ranh trí tuệ và tình cảm. Ở bên ngoài nước Đức, Klein là hình tượng của đỉnh cao

---

[127] *[Kreisbogenpolygone]*

văn hóa Đức. Tự tin, đẹp trai, có giáo dục cao, và kết hôn với cháu gái của Hegel, ông có tất cả mọi quyền lợi của một giáo sư người Đức với một đội ngũ sinh viên tận tâm. Trong nước Đức, tuy nhiên, có sự phân chia giữa trường phái giải tích, mà đại diện là nhà toán học vĩ đại và đầy ảnh hưởng Karl Weierstrass, và trường phái những người ủng hộ phương pháp thiên về hình học liên quan đến Riemann. Klein cùng các sinh viên gắn kết với xu hướng thứ hai, và điều nay góp phần làm tăng vết rạn nứt giữa hai trường phái, bởi sự nhiệt tình của Klein vừa có tác dụng chia cắt vừa có tác dụng thống nhất. Sự rạn nứt này đồng thời cũng co hệ quả ở bên ngoài nước Đức. Ở Pháp, thầy hướng dẫn của Poincaré là Charles Hermite cực kì ngưỡng mộ Weierstrass nhưng ghét bất cứ điều gì liên quan đến hình học, và không bao giờ bận tâm đến việc tìm hiểu bất kì phương pháp nào của Riemann. Kết quả là, sự giáo dục của Poincaré khá mất cân bằng. Fuchs, người đã thực hiện một số công trình quan trọng trước chiến tranh cùng Hermite, hoàn toàn ở cùng trường phái với Weierstrass và vô cùng hoài cổ.

Vì vậy, một điều khiến ta bật cười là Poincaré, người hầu như chẳng biết về những gì Riemann đã làm, đã bắt đầu tự mình sáng tạo và khám phá lại một số kết quả của Riemann. Thế mà, ông lại đặt tên cho những hàm số mới của mình theo tên của Fuchs, và điều này dường như đặt ông vào cùng trường phái với Weierstrass. Lúc đầu còn hòa nhã, sau đó mạnh bạo hơn, Klein đề nghị Poincaré đổi tên hàm số Fuchs để công nhận đóng góp của Schwartz va những người khác. Poincaré từ chối. Một

điều khiến ta bật cười thứ hai là Klein đã nghiên cứu cẩn thận công trình của Riemann và các công trình khác phát triển từ đó. Sự mù mờ kì lạ của Poincaré về các công trình này đã cho Klein một sự khởi đầu rất tốt đẹp. Nhưng Poincaré, người thực sự xuất chúng, ngay lập tức làm chủ bất cứ điều gì mà Klein ám chỉ. Cuộc trao đổi này đã dẫn ông đến với công trình của Riemann.

Một loạt những sự trớ trêu khác phát sinh từ vấn đề quốc tịch. Quan hệ giữa Pháp và Đức tồi tệ. Poincaré, do địa điểm nơi ông ra đời, đã trực tiếp chứng kiến sự xâm lăng của Đức và trở thành đại diện cho tinh hoa của nước Pháp. Khẩu hiệu *non inultus premor* mà ông đính kèm vào bài dự thi trong cuộc đua tranh giành tài trợ của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp là của Nancy, quê hương ông, một khẩu hiệu đầy thù địch được dịch gần như là "không thương tích nào mà không được trả thù,"[128] và thậm chí vết thương đó còn bị khoét sâu hơn sau khi nước Pháp bị làm nhục vào năm 1870. Về phần mình, Klein với tinh thần yêu nước đã xung phong vào quân đội Đức và phục vụ trong chiến tranh. Mặc dù không phải là người theo chủ nghĩa dân tộc cực đoan, nhưng một số người đã khiến ông có vẻ như vậy, ông có một điểm yếu là tôn sùng một cách mù quáng vào các truyền thuyết về những đặc tính ưu việt của trí tuệ quốc gia và chủng tộc, cái sẽ bóp méo hình ảnh nước Đức trong thế kỉ 20. Vài năm sau

---

[128] Khẩu hiệu này ám chỉ sự thất bại của Charles le Teméraire trước Nancy năm 1477. Thường được dịch tục trong tiếng Pháp là "Qui sý trotte, sý pique", tạm dịch như sau: "Đụng vào, sẽ nhận được đau thương" hay "Khiêu khích ta, ngươi sẽ trả giá."

đó, ông nói chuyện gần như theo cách thần bí về bầu không khí tại Gottingen,[129] và ông tin rằng tư tưởng của Riemann là biểu tượng của trí tuệ khoa học siêu việt Đức. Nhưng ông lại thấy ở Poincaré, một chàng trai Pháp trẻ tuổi thậm chí còn giống Riemann hơn chính bản thân Riemann.

Các bức thư trao đổi qua lại trong khoảng hơn một năm. Về vẻ bề ngoài, họ rất lịch sự nhưng thực chất lại cực kì nhạy cảm. Cả hai dồn nhau vào chân tường. Klein đề nghị Poincaré gửi một bài báo mang tính tóm lược phác thảo một số kết quả của ông đến *Mathematische Annalen*, lúc đó là tạp chí hàng đầu và Klein là người biên tập. Poincaré đồng ý. Điều này tạo ra sự bất đồng về tên tuổi và thẩm quyền giữa hai ông. Klein thêm vào lời từ chối trách nhiệm đối với bài báo của Poincaré, nêu rõ bất đồng của ông trước sự lựa chọn các thuật ngữ của *Fuchs* và của *Klein* (thuật ngữ sau phần nào là câu trả lời tinh quái của Poincaré cho phản đối trước đó của Klein về việc

---

[129] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, Teil I, II.

(Berlin: Springer, 1926 [Teil I], 1927 [Teil II]). Đặc biệt xem trang 249 của tập I: "Chúng ta không thể tổng kết khác hơn là không khí Gottingen đã bão hoà với âm vang hình học gây ra một lực hấp dẫn mạnh mẽ từ một Riemann nhạy cảm và tài năng. Môi trường xung quanh mà một người thấy mình thậm chí còn quan trọng hơn là các sự kiện và kiến thức cụ thể cung cấp cho anh". Một bản dịch tiếng Anh của tập đầu tiên, có tựa đề *Development of Mathematics in the Nineteenth Century*, bởi M. Ackerman xuất hiện trong tập 9 của seri *Lie Groups: History, Frontiers and Applications*, biên tập bởi R Hermann (Brookline: Math Sci Press, 1979)

sử dụng tên *Fuchs*). Poincaré khăng khăng rằng việc ông được phép tự lựa chọn các tên gọi là hoàn toàn xác đáng. Klein giúp đỡ bằng cách chèn một đoạn trích của một lá thư mà Poincaré viết về chủ đề này, nhưng đồng thời viết cho nhà toán học người Pháp rằng ông không hài lòng về điều đó.

Trong lá thư trả lời của Poincaré vào ngày 4 tháng 4 năm 1882, sôi lên với thái độ thù địch Phổ.

> "Tôi vừa nhận thư ông thì vội vàng trả lời ngay. Ông cho tôi biết rằng ông muốn chấm dứt cuộc tranh luận vô ích vì khoa học và tôi hoan nghênh giải pháp đó. Tôi làm như vậy vì biết rằng giải pháp này không gây tổn thất nhiều cho ông bởi trong ghi chú mà ông gửi kèm cho tôi, chính ông là người nói những lời cuối cùng. Về phía tôi, tôi không phải là người bắt đầu cuộc tranh luận này và tôi đã nhập cuộc với chỉ đơn thuần một, và chỉ một ý kiến duy nhất mà thôi, đó là tôi không đồng ý xóa bỏ (tên hàm số Fuchs). Tôi không phải là người muốn kéo dài cuộc tranh luận, tôi sẽ không bao giờ bàn về nó nữa trừ phi bị bắt buộc, và tôi cũng chẳng thấy bất cứ điều gì ép buộc tôi cả....
>
> Tôi hi vọng rằng cuộc cưỡi ngựa đấu võ với vũ khí cùn mà chúng ta vừa mới nhen nhúm về một cái tên sẽ không làm tổn thương mối quan hệ của chúng ta. Trong bất cứ tình huống nào, tôi không chút phật ý vì sự công kích của ông, và hi vọng ông cũng không phật ý vì tôi đã tự bảo vệ bản thân. Dù gì đi nữa, sẽ quá là vô lí nếu chúng ta phải cãi nhau thêm vì một cái tên, *Name ist Schall und Rauch* (cái tên chỉ là tiếng ồn và mây khói), cũng hoàn toàn như vậy với tôi: ông làm điều

ông muốn, về phần tôi, tôi cũng sẽ làm điều tôi muốn."[136]

---

[136] Bức thư hoàn chỉnh sau. Đoạn thứ ba là đoạn mà Klein sẽ không bao giờ quên. Klein gửi cho Poincaré một trang bản thảo chứng minh của một bài báo công bố một định lí lớn, và Poincaré nói với Klein rằng ông đã biết kết quả khá lâu rồi. Khi nhận bản ghi chú của Klein, Poincaré vội vã gửi một thông báo lên *Comptes Rendus* (Tham khảo). Nỗi cay đắng của Klein lộ rõ trong đoạn trích đi kèm với các bức thư trong công trình toàn tập tiếng Pháp. Điều rõ ràng sau một thế kỉ là cả hai ông đều "biết" kết quả là đúng, nhưng không thể hoàn toàn chứng minh điều đó. Các công cụ toán học lúc đó chưa có sẵn, và chứng minh đầy đủ được hoàn thành bởi Poincaré và Koebe vào năm 1910.

Paris, 4 April, 1882.

Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la Science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependant. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer.

Si j'ai donné votre nom aux functions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas comme vous l'insinuez, *zur Entschädigung;* car je n'ai à vous dédommager de rien; je ne reconnaîtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré qu'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des functions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces functions des développements en series. Je réponds à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des functions définies par M. Fuchs au tome 89 de *Crelle*, vous dites; "Sind diese Funktionen

Đây không phải là cuộc giao đấu lịch thiệp, mà chỉ là một trận ẩu đả trên đường phố tối tăm bằng dao bấm giấu kín trong túi áo - và Poincaré, một cách điêu luyện, đã trở ngược mũi dao. Ông nhạo báng quyết tâm chấm dứt cuộc tranh luận của Klein bằng cách sử dụng một cách diễn đạt ("giải pháp này không gây tổn thất nhiều cho ông") có thể nhắc lại các khoản thanh toán chi phí tái thiết sau

---

wirklich eindeutig? Ich verstehe nur dass sie in jedem Wertsystem welches sie erreichen unverzweigt sind." Voici ma réponse, les functions étudiees par M. Fuchs se partagent en trois grandes classes; celles des deux premières sont effectivement uniformes; celles de la troisieme ne sont en général que *unverzweigt*. Elles ne sont uniformes que si l'on ajoute une condition à celles énoncées par M. Fuchs. Ces distinctions ne sont pas faites dans le premier travail de M. Fuchs, on les trouve dans deux notes additionelles, malheureusement trop concises et insérees l'une au *Journal de Borchardt*, t. 90, l'autre aux *Gottinger Nachrichten, 1880*.

Je vous remercie beaucoup de votre dernière note que vous avez eu la bonte de m'envoyer. Les résultats que vous enoncez m'intéressent beaucoup, voici pourquoi; je les avais trouvés il y a déjà quelques temps, mais les publier parce que je désirais éclaircir un peu la demonstration; c'est pourquoi je désirais connaître la vôtre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.

J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altérera pas nos bonnes relations. Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom, *Name ist Schall und Rauch* et après tout ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

chiến tranh mà Đức đã buộc Pháp chi trả.[131] Ông sử dụng các thuật ngữ quân sự một cách tinh quái, mà không thể là gì khác hơn ngoài tiếng vang dội lại từ năm 1870, và trích dẫn một đoạn trả lời thư nổi tiếng và nóng vội của *Faust*[132] cho Gretchen ngây thơ trong tác phẩm *Faust* của Goethe ("Gefühl ist Alles, Name ist Schall und Rauch" [Cảm giác là tất cả, còn cái tên chỉ là tiếng ồn và mây khói.]), như một lời chế giễu tột cùng; ông kết thúc với việc thay đổi đột ngột từ văn viết sang văn nói ("ông làm điều gì ông muốn, ..., tôi cũng sẽ làm điều tôi muốn."). Cuộc trao đổi tiếp tục cho đến tháng 9 năm 1882, Klein và Poincaré tuyệt giao khi cả hai tự mình sắp xếp để xuất bản các công bố đầy đủ về những khám phá của mỗi người.[133]

---

[131] Nếu điều này có vẻ cường điệu đối với bạn, hãy xem xét rằng Poincaré có thể, ví dụ, sử dụng lời nói vẫn còn xúc phạm nhưng bớt nặng nề, "Nó có thể không quá khó khăn cho ông."

[132] Cả Poincaré và Klein hẳn đều quen thuộc với *Faust* của Goethe. Câu này là câu trả lời của Faust cho câu hỏi "Gretchenfrage," của Gretchen hỏi những suy nghĩ của Faust về tôn giáo. Sau một hồi vòng vo, tránh đi vào vấn đề ai tạo ra Chúa và thế giới thần linh, Faust cuối cùng kết luận, "Gefühl ist Alles/Name ist Schall und Rauch", được dịch là "Cảm giác là tất cả, còn cái tên chỉ là tiếng ồn và mây khói." Thậm chí người ngày nay cũng sử dụng phần sau của trích dẫn để hạ thấp tầm quan trọng của ngữ nghĩa, nhưng Klein chắc hẳn đã nghĩ đến phần đầu ngay lập tức.

[133] Ghi chú cuối trang của Klein về cuộc trao đổi (trang 621 của tập 3 bộ toàn tập tác phẩm của ông) khẳng định rằng đây là trao đổi cuối của họ. "Mit diesem Briefe fand die Korrespondenz seinerzeit ihr Ende. Ich vermochte es nur noch, die Abh. CIII fertigzustellen und mu~temich dann, wegen des Versagens meiner Gesundheit, von der weiteren Mitarbeit an der Theorie der automorphen

Sự đối đầu đã làm cả hai ông tăng gấp đôi nỗ lực lao động của mình. Mặc dù lợi ích khoa học là không đong đếm được, nhưng tổn thất của mỗi cá nhân thật ghê sợ. Cả Klein lẫn Poincaré đều làm việc cần mẫn hơn mà không cần thêm bất kì động lực nao khác. Dân gian truyền miệng rằng có một sinh viên sau đại học đã nhắc Klein rằng làm việc quá khuya dẫn đến sự mất ngủ, và Klein càu nhàu rằng thuốc ngủ là cần thiết cho lúc nay. Làm việc quá sức là bệnh nghề nghiệp của các nhà toán học: những vấn đề là cực kì thú vị, và không quá khó khăn để bị chúng ám ảnh (Một câu chuyện đùa lạc đề nhưng mang tính khám phá được các sinh viên sau đại học năm thứ nhất lặp đi lặp lại là câu hỏi tại sao các nhà toán học hàng đầu đều cần có một người tình. Kết luận gây cười là, vì như thế, anh ta có thể nói với vợ rằng anh đang ở với người tình, và nói với người tình là anh đang ở với vợ, do vậy anh có thời gian rảnh để làm những gì mà anh thực sự muốn: ngồi trong văn phòng và nghiền ngẫm về các bài toán đòi hỏi nhiều thời gian.).

Sự căng thẳng và làm việc quá sức ảnh hưởng đến Klein nhiều hơn Poincaré. Ông sụp đổ hoàn toàn vào mùa thu năm 1882 và bước vào một giai đoạn trầm cảm nghiêm trọng kéo dài qua các năm 1883 và 1884. "Các công trình toán học lí thuyết thực sự hữu ích của tôi đã lụi

---

Funktionen zurückziehen, wie schon oben auf S. 585 und in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 258 ausgeführt wurde. Auf die Obersendung meiner Arbeit habe ich von H. Poincaré keine Antwort mehr erhalten. Auch spätere persönliche Bezugnahme haben die hier berührten Fragen nur wenig geklärt."

tàn từ năm 1882", ông viết lại sau này.[134] Ông tiếp tục nhận xét, hơi cay đắng, rằng ông hoàn toàn phải nhường lại lĩnh vực này cho Poincaré. Klein vẫn tiếp tục đóng góp nhiều cho toán học, nhưng chỉ dưới vai trò của một người truyền bá và kích hoạt. Ông không còn xung phong đi đầu của sự khám phá toán học nữa. Cuốn sách mà ông hứa hẹn trong bức thư cuối cùng gửi Poincaré không xuất hiện cho đến mười lăm năm sau đó. Poincaré, mặt khác, xuất bản một bản công bố đầy đủ thông qua năm bài báo trên tạp chí *Acta Mathematica*, một tạp chí mới được thành lập bởi nhà toán học người Thụy Điển Gustav Mittag-Leffler. Nhưng Poincaré cũng phải trả giá. Bác sĩ chẩn đoán ông kiệt sức vì làm việc quá nhiều vào mùa hè năm 1884, và buộc ông phải an dưỡng một tháng.

---

[134] Từ Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*. Teil 1 (Berlin: Springer, 1928). Có một bản dịch tiếng Anh, *Development of Mathematics in the Nineteenth Century* bởi M. Ackermann (Brookline: Math Sci Press, 1979). Đoạn trích dẫn có thể được tìm thấy trên trang 361: "Cái giá mà tôi phải trả cho công việc của tôi là cực kì cao - sức khỏe của tôi hoàn toàn suy sụp. Trong những năm tiếp theo, tôi phải dừng lại rất lâu và từ bỏ tất cả các hoạt động công việc. Mọi việc không có gì tiến triển cho đến mùa thu 1884, nhưng tôi chưa bao giờ lấy lại được năng suất làm việc trước đây. Tôi không bao giờ có thể quay trở lại hoàn thành các ý tưởng trước đây. Và sau đó, khi ở Göttingen, tôi trở về mở rộng phạm vi công việc và tổng kết nhiệm vụ tổ chức khoa học của chúng tôi. Vì vậy có thể hiểu từ đó tôi chỉ thỉnh thoảng chạm vào hàm số tự đẳng cấu (automorphic function). Các công trình toán học lí thuyết thực sự hữu ích của tôi đã lụi tàn từ năm 1882. Tất cả những gì theo sau, nếu không phải là truyền bá toán học thì cũng đơn thuần chỉ là vấn đề triển khai các chi tiết cũ mà thôi."

Cuối cùng, cả hai đều lại đứng vững trên đôi chân của mình, mặc dù sự nghiệp của họ tách xa nhau một cách nhanh chóng. Klein nhận lời mời cho một vị trí tại Göttingen và chuyển tài năng tuyệt vời của mình sang lĩnh vực truyền bá, giảng dạy, và quản lí. Ông biến Gottingen thành trung tâm toán học và vật lí không có đối thủ trên toàn thế giới. Giai đoạn đầu của cuộc trao đổi trong năm 1881, Poincaré hầu như chưa được biết đến, mặc dù đã có một vài người công nhận ông là ngôi sao có tiềm năng ở mức tỏa sáng. Ông vừa mới kết hôn,[135] và trong tháng 10 năm đó ông đã nhận được một công việc chính thức ở mức khởi điểm[136] ở Paris. Một năm sau khi kết thúc cuộc trao đổi với Klein, Poincaré bắt đầu đánh giá cao công trình của Riemann, đã làm chủ nó và thậm chí vượt xa nhiều công trình của cả hai trường phái Klein và Weierstrass. Bài báo đầu tiên trong số những bài báo vĩ đại xuất hiện trên tạp chí *Acta* xuất bản vào tháng 12 năm 1882; và bài cuối cùng, và là bài thứ năm trong số đó, xuất hiện chưa đầy hai năm sau. Các bài báo này đã gây dựng uy tín cho tạp chí và làm Poincaré nổi tiếng. Năm 1884, ông khơi nguồn một lĩnh vực nghiên cứu hoàn toàn mới mà năm năm sau đã cách mạng hóa các ngành vật lí liên quan đến toán học. Trong khi đó, năm 1885, ông nhận một vị trí (theo chuyên ngành vật lí) trong khoa Khoa học tại Paris. Năm 1887, cùng với việc đứa con đầu tiên ra đời,

---

[135] Ông kết hôn ngày 20 tháng 4 năm 1881. Vợ ông là Poulain d'Andecy của dòng họ Geoffroy Saint-Hilaire.

[136] Maitre de conferences (tương đương với trợ lí giáo sư), Poincaré file, Centre historique des Archives nationales, Paris, AJ/16/6124.

ông được bầu vào Viện Hàn lâm Khoa học Pháp ở tuổi ba mươi hai, trẻ gần như không thể tưởng tượng được.[137]

[137] Có một mốc thời gian hữu ích trong kho lưu trữ trực tuyến được duy trì bởi trường Đại học Nancy (www.univ-nancy2.fr/Poincare/index.html). Cục Lưu trữ Quốc gia có các ngày bổ nhiệm. Các tài liệu lưu trữ của Viện Hàn lâm Khoa học cho thấy Poincaré được đề cử lần đầu vào năm 1880 và vài lần sau đó, khá là dồn dập.

10

Những bài học về topo học của Poincaré

Hầu như không ai tránh khỏi tầm ảnh hưởng của những thành tựu trí tuệ mà Poincaré và Klein đã đạt được. Họ đã mở ra một kỉ nguyên toán học hoàn toàn mới. Hình học Phi-Euclid kể từ đó chiếm một địa vị vững chắc trong dòng toán học chính thống. Hơn nữa, điều thú vị nhất là, mặc dù các chi tiết phải mất thêm hai thập kỉ nữa mới được xây dựng đầy đủ, công việc của họ đã dẫn đến một mối liên hệ cực kì sâu sắc và hoàn toàn bất ngờ giữa topo học và hình học trong không gian hai chiều. Định lí và cũng là kết quả của điều này là một trong những thành quả đẹp hấp dẫn nhất của toán học và, vì vậy, trong cả tư tưởng nhân loại. Giả thuyết Poincaré phải mất hai mươi năm nữa mới ra đời, và lúc đó dường như không có liên hệ gì với kết quả này. Tuy nhiên, như số phận đã định đoạt, một kết quả tương tự đến mức không tưởng của định lí đó trong không gian ba chiều lại có ràng buộc chặt chẽ với giả thuyết Poincaré.

Để xem Poincaré và Klein đã khám phá những gì, ta nên nhớ rằng một trong những thành tựu lớn nhất của thế kỉ 19 là sự phân loại của tất cả các bề mặt khác nhau về mặt topo học. Vậy sự phân loại các bề mặt theo hình học thì ra sao? Nếu chỉ nhìn thoáng qua, điều này dường như là vô vọng. Có quá nhiều khả năng. Mặt cầu có bán kính khác nhau là không đẳng cự với nhau, kể cả các mặt cầu có chỗ trũng hoặc đồi núi nhô cao. Tuy nhiên, công trình của Poincaré và Klein hàm ý rằng trên bất kì bề mặt nào cũng có thể xác định được một dạng hình học mà theo đó bề mặt có độ cong không đổi (và điều này dẫn đến một hệ quả dễ dàng là dạng hình học này phải là duy nhất - nếu một bề mặt có dạng hình học phẳng, chúng ta không thể đặt một dạng hình học của mặt cầu lên trên nó).

HÌNH HỌC TỰ NHIÊN TRÊN MỘT BỀ MẶT

Điều này không quá ngạc nhiên đối với một mặt cầu. Chúng ta biết rằng một mặt cầu tròn hoàn hảo là đồng phôi với bất kì mặt cầu nào, và do đó mặt cầu có dạng hình học mặt cầu. Nhưng, còn hình xuyến thì sao? Bất kì hình xuyến nào trong không gian ba chiều cũng có khu vực có độ cong âm và khu vực có độ cong dương. Dọc theo mặt bên ngoài của hình xuyến, tam giác có tổng các góc hơn 180 độ, do đó, ở đây độ cong là dương. Dọc theo mặt bên trong, hình xuyến có hình yên ngựa và tam giác có tổng các góc nhỏ hơn 180 độ, do đó, độ cong ở đây là

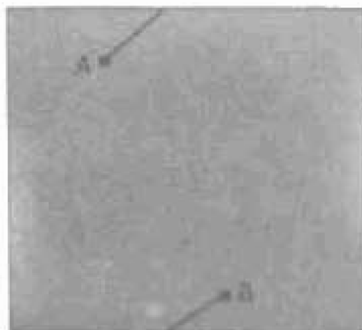
âm. Bây giờ, hãy tưởng tượng về hình xuyến theo cách mà chung ta đã làm trong Chương 3 - tưởng tượng rằng đó là bề mặt thu được từ một hình vuông bằng cách đính những lề đối diện tương ứng. Nghĩa là, chúng ta xem mỗi điểm ở lề dưới của tờ giấy giống hệt như điểm tương ứng ở lề trên nằm ở hướng thẳng đứng phía trên đầu nó, và mỗi điểm trên lề trái giống hệt như điểm tương ứng trên lề phải.

Chúng ta hãy làm theo lời của Riemann và xác định một dạng hình học trên bề mặt hình xuyến, bằng cách nói rằng chúng ta sẽ đo các chiều dài và các góc trên hình xuyến bằng cách đo các chiều dài và các góc tương ứng trên hình vuông.[138] Chúng ta phải nhớ rằng khi một cái gì đó đi ra ngoài hình vuông qua một trong số những chiếc lề, nó sẽ quay trở về qua điểm tương ứng trên lề đối diện. Hiệu ứng này nói lên rằng các đoạn thẳng trên hình

---

[138] Nhớ lại rằng, theo công trình của Riemann, việc xác định một dạng hình học tóm lại chính là để quyết định cách thức đo chiều dài của một vectơ vận tốc (nghĩa là, tốc độ) tại một điểm trên một đường cong vẽ nên bởi một đối tượng trên hình xuyến này. Chúng ta có thể đồng ý với suy nghĩ một đường cong trên hình xuyến như một đường cong trên một hình vuông, và vì vậy chúng ta đồng ý với việc sử dụng mêtric Euclid trên hình vuông. Chúng ta sẽ không gặp bất cứ rắc rối gì bởi vì các góc ăn khớp với nhau khi chung ta đồng nhất chúng - đặc biệt là bốn góc vuông khớp vào nhau vòng quanh một đỉnh (của hình vuông). Đối với độc giả có kiến thức vi-tích phân, chúng ta thống nhất định nghĩa độ dài của một vectơ vận tốc tại mỗi điểm của một đối tượng di chuyển dọc theo một đường trên hình xuyến, bằng cách xem xét đường tương ứng trên hình vuông và đo độ dài theo tiêu chuẩn Euclid của vận tốc chuyển động tương ứng của đối tượng đó

xuyến cũng là các đoạn thẳng trên hình vuông, với điều kiện là chúng có thể đi ra ngoài qua một cạnh và trở lại về qua một cạnh khác. Thật vậy, các đoạn thẳng ngắn nhất nối một điểm vào một điểm khác có thể đi ra từ một cạnh và trở về qua cạnh khác (Hình 43).[139]



Hình 43. Đường thẳng nối hai điểm trên một hình xuyến.

[139] Lưu ý rằng bạn cũng có thể có đường thẳng có chiều dài hữu hạn. Các đường này đi vòng quanh hình xuyến một vài lần theo một hướng và một số lần khác theo hướng khác. Ngoài ra cũng có các đường thẳng có chiều dài vô hạn: Chúng đi vòng quanh hình xuyến vô số lần theo cả hai hướng tiến gần đến bất kì điểm nào trên hình xuyến, một tình huống được mô tả bằng cách nói rằng đường này có tính *trù mật* trên hình xuyến.



Hình h. Một đường thẳng hữu hạn trên hình xuyến (các cạnh đối diện nối với nhau).

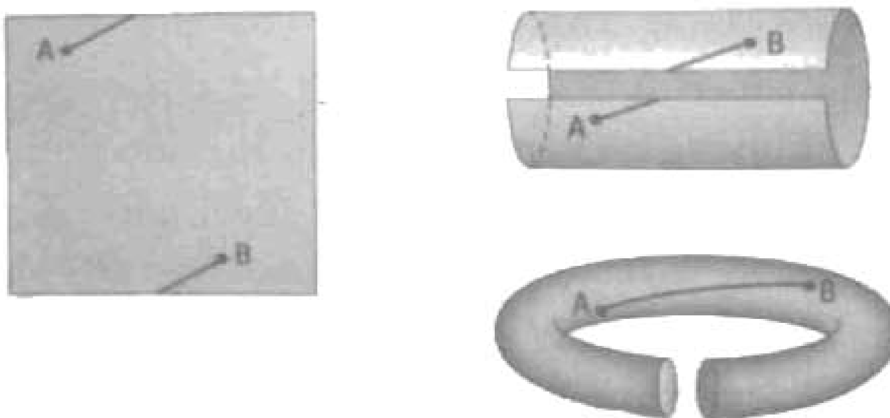
Bất kì tam giác nào trên hình xuyến cũng có 180 độ. Vì vậy, hình xuyến này phẳng và dạng hình học trên nó là hình học Euclid (nhưng khác với mặt phẳng Euclid ở chỗ, các đường thẳng của nó là hữu hạn và các diện tích cũng hữu hạn). Vì lí do này, nó được gọi là *hình xuyến phẳng*.

Tác dụng của việc nối cạnh trên với cạnh dưới của hình vuông là để cuộn hình vuông thành một hình trụ. Việc này không làm sai lệch khoảng cách và có thể dễ dàng được thực hiện trong không gian ba chiều. Bởi vì khoảng cách không sai lệch, các đường thẳng và các tam giác vẽ trên hình vuông trở thành các đường thẳng trên hình trụ. Đặc biệt, do các tam giác đó có tổng các góc là 180 độ, nên hình trụ là phẳng. Chúng ta có thể dễ dàng bọc một tấm ga trải giường phẳng cho một hình trụ (Hình 44).

Tuy nhiên, khi chúng ta cố gắng nối các cạnh trái và phải với nhau theo cùng cách đó trong không gian ba chiều, và kéo vòng tròn ở mỗi đầu của hình trụ ra xung quanh sao cho chúng nối với nhau thì chúng ta đã làm biến dạng khoảng cách và do vậy đã tạo nên độ cong. Đi từ hình trên bên phải xuống hình dưới bên phải trong Hình 44, chúng ta đã làm thay đổi khoảng cách giữa một vài điểm. Từ đó ta thấy rằng không có cách nào để có được một hình xuyến trong không gian ba chiều mà không làm biến dạng khoảng cách cũng như không tạo ra độ cong. Tuy nhiên, việc không thể thực hiện điều đó trong không gian ba chiều không có nghĩa là nó không tồn tại. Dĩ nhiên, nó tồn tại! Chúng ta có một tập hợp xác

định. Chúng ta có một khoảng cách xác định. Còn cần gì hơn nữa. Đối với một nhà toán học, hình xuyến phẳng tự nhiên hơn là hình xuyến nằm trọn trong không gian ba chiều. Suy cho cùng, bản thân không gian ba chiều chính là một cấu trúc toán học - chúng không tồn tại bên ngoài toán học. Khi chúng ta nghĩ về một mô hình của một mặt cầu, chúng ta nghĩ ngay tới mặt cầu tròn có độ cong không đổi.

Ngược lại với hình xuyến thông thường, hình xuyến hai lỗ có một mêtric và một độ cong âm không đổi. Đó là hình thái tự nhiên nhất, đối xứng nhất mà một dạng hình học hyperbolic có thể có được. Để luận ra điều này, ta dùng một phương pháp tương tự với phương pháp được dùng để lập luận rằng dạng hình học tự nhiên trên hình xuyến là hình học Euclid (nghĩa là phẳng), nhưng đồng thời phức tạp hơn một chút. Trước tiên, việc quan sát quá trình cắt một hình xuyến hai lỗ để cho nó có thể mở ra



Hình 44. Nối cạnh trên với cạnh dưới không làm biến đổi khoảng cách trong không gian ba chiều. Nhưng nối cạnh trái vào cạnh phải thì sẽ làm khoảng cách biến đổi.

thành một mặt phẳng (Hình 10 trong Chương 3) thực sự cho thấy rằng bạn có thể xem hình xuyến hai lỗ như là một hình bát giác (là đa giác có tám cạnh) với các cạnh lần lượt đồng nhất (Hình 44).

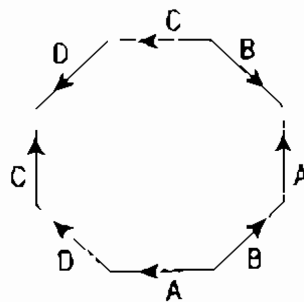
Chúng ta không thể làm điều tương tự như đã làm với hình xuyến để xác định dạng hình học trên hình xuyến hai lỗ bằng cách sử dụng độ dài và góc của một bát giác đều (tất cả các cạnh bằng nhau). Lí do là, sau khi kết hợp tất cả những điểm giống nhau, tất cả các đỉnh của bát giác được đồng nhất thành một điểm duy nhất, và tất cả tám góc của bát giác xoay quanh điểm đó. Nhưng có 360 độ quanh một điểm (đây là định nghĩa của đơn vị đo độ), và do đó nếu chúng ta muốn tám góc vừa vặn một cách tuyệt đối vào một điểm, thì mỗi góc sẽ phải là 45 độ (bởi vì 360 độ chia 8 bằng 45). Nhưng rõ ràng từ Hình 45, mỗi góc của một bát giác đều có hơn 45 độ, vì vậy sẽ không vừa vặn.[140]

Chúng ta hãy nhớ lại rằng, tuy nhiên, trong hình học hyperbolic, các tam giác có tổng số đo góc ít hơn 180 độ, và khi chúng tôi mở rộng các đa giác thì góc của chúng nhỏ đi. Điều này đặt ra khả năng có thể tạo ra một bát

---

[140] Trong thực tế, nếu dạng hình học đó là Euclid - do vậy tổng các góc của một tam giác là 180 độ - thì tổng các góc trong một đa giác tám cạnh bất kì, đều hay không, phải là 1.040 độ. Lí do là nếu bạn chọn một đỉnh của đa giác tám cạnh và vẽ các đường thẳng từ đó đến các đỉnh khác, bạn chia đa giác tám cạnh thành 6 tam giác có tổng tất cả các góc bằng tổng các góc của đa giác tám cạnh này. Vì vậy đa giác tám cạnh có 180 nhân 6 độ, hay 1.040 độ (Điều này cũng cho phép chúng ta kết luận rằng độ lớn mỗi góc của một bát giác đều là 1.040 chia cho 8, bằng 135 độ.).

giác đều trong hình học hyperbolic với góc 45 độ. Sau đó có thể nối tất cả các cạnh lại và chúng sẽ vừa vặn tuyệt đối quanh đỉnh chung. Nói cách khác, chúng ta có thể cắt được một bát giác đều có mỗi góc là 45 độ ra khỏi một tấm khăn hình hyperbolic, và sau đó nối các cạnh lại để tạo ra một hình xuyến hai lỗ có độ đối xứng tuyệt đối. Điều này sẽ cho phép xác định các khoảng cách trong bát giác Phi-Euclid này để đo các khoảng cách trên hình xuyến hai lỗ (cũng như trong trường hợp của hình xuyến, thông thường, khoảng cách ngắn nhất có thể có được bằng cách vượt qua một cạnh và sau đó trở về qua cạnh khác. Với dạng mêtric này, hình xuyến hai lỗ sẽ có độ cong âm không đổi (vì mặt phẳng hyperbolic là như vậy). Khu vực xung quanh mỗi điểm là đẳng cự với khu vực xung quanh bất kì điểm nào khác. Nó hoàn toàn đối xứng.



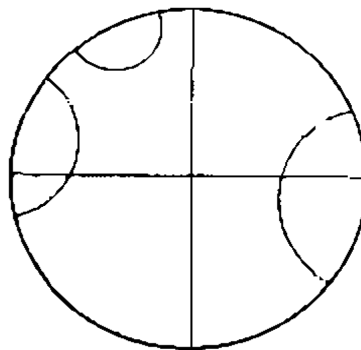
Hình 45. Nối các điểm tương ứng trên cặp cạnh được đánh dấu bởi cùng một kí tự (theo hướng mũi tên) cho ra một hình xuyến hai lỗ. Tuy nhiên, mỗi góc lớn hơn 45 độ, vì vậy ta không thể đồng nhất chúng lại quanh một điểm chung trừ phi làm thay đổi các góc (và khoảng cách).

Những hiểu biết cần thiết để lập luận rằng cấu trúc trên vừa khả thi lại vừa có ý nghĩa, cũng chính là những

gì mà Poincaré đã nghĩ ra khi bước chân vào xe ở Coutances. Dĩ nhiên, để triển khai một cách chi tiết, Poincaré cần một phương pháp phân tích sâu hơn để hình dung về một dạng hình học có độ cong không đổi - so với cách mà chúng ta đã phác thảo trong Chương 8, sử dụng tấm vải dệt không biến dạng. Poincaré đã phát triển các phương pháp tư duy khác nhau về hình học của Lobachevsky bằng cách tưởng tượng một phần của mặt phẳng thông thường và định nghĩa khoảng cách khác với khoảng cách của Euclid, sao cho từ góc nhìn của những người theo trường phái Euclid, các đường trắc địa (nghĩa là các đường thẳng) sẽ có vẻ như bị đè lên nhau. Một trong những phương pháp đó là *mô hình đĩa Poincaré* của mặt phẳng hyperbolic. Cho một đĩa, nghĩa là khu vực bao bọc bởi một vòng tròn trên mặt phẳng thông thường (không bao gồm đường tròn xung quanh). Ta hãy tưởng tượng rằng các khoảng cách ở đây được định nghĩa sao cho chúng trở nên lớn dần hơn khi chúng ta tiến gần về phía vòng tròn ranh giới, như thể ranh giới đó là xa vô hạn. Điều này có vẻ khác với một bề mặt làm bằng một tấm vải được dệt lại sao cho bất kì hình tròn nào có nhiều diện tích hơn nó đều nằm trong mặt phẳng Euclid. Tuy nhiên, hai phương pháp tư duy này về mặt phẳng hyperbolic là tương đương: cách đầu tiên, chúng ta đứng trên góc nhìn của một con bọ sống trên bề mặt đó - tất cả các phần của bề mặt đều giống nhau, mặt phẳng kéo dài đến vô tận. Còn theo cách kia, chúng ta tưởng tượng mình đang có thêm một chiều nữa bên ngoài bề mặt và xem nó giống như một cái đĩa trên đó các khoảng

cách ngày càng lớn hơn khi chúng ta ngày càng tiếp cận gần đường biên hơn.

Trong mô hình dĩa này, hóa ra là chúng ta có thể định nghĩa các khoảng cách trên đĩa sao cho: (1) các đường trắc địa là đường thẳng đi qua tâm dĩa và các cung tròn mà khi chúng cắt vòng tròn biên thì ta được các góc vuông, (2) các góc tạo bởi giao điểm của các đường trắc địa trùng với các góc của Euclid, và (3) qua mỗi điểm chỉ có chính xác một đường trắc địa duy nhất đi qua theo một hướng bất kì (Hình 46). Trùng hợp thay, phần nội biên của hình tròn đơn vị là đồng phôi với mặt phẳng, bất kể dạng hình học nằm trên chúng là gì. Mô hình dĩa này rất thuận tiện trong tính toán. Nó cũng có tầm quan trọng nữa: nó chỉ ra rằng ta có thể bàn về các dạng hình học Phi-Euclid bằng cách sử dụng các thuật ngữ của Euclid.



Hình 46 Mô hình đĩa Poincaré với các đường trắc địa.

Với mô hình dĩa này trong tay, chúng ta hãy tìm một bát giác đều trên chiếc đĩa với dạng métric mà Poincaré đã sử dụng. Góc bên trái của Hình 47 chỉ ra một bát giác

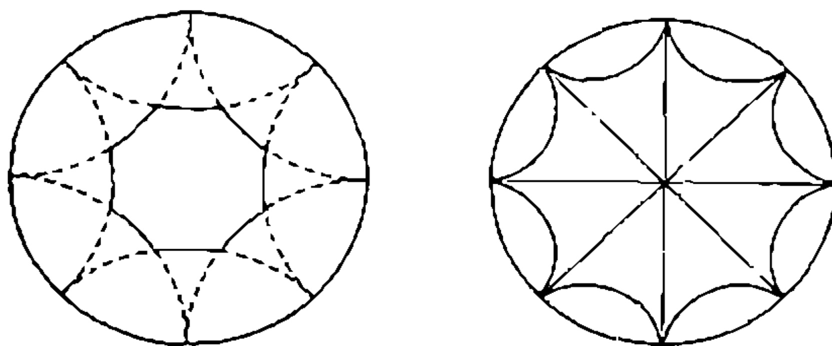
đều nhỏ mà trong đó mỗi góc của nó lớn hơn 90 độ (Hãy nhớ rằng các đường thẳng là những đường tròn cắt đường tròn biên bằng các góc 90 độ). Góc bên phải, chúng ta có một bát giác đều trong đó mọi góc là 0 độ (các đỉnh của bát giác nằm ở vô cực). Nếu ta mở rộng bát giác ở bên trái cho đến khi nó trở thành bát giác ở bên phải, thì các góc càng ngày càng nhỏ hơn, cuối cùng tiến đến 0 độ. Đối với một bát giác trung gian nào đó, các góc của nó sẽ chính xác bằng 45 độ, cũng giống như khi chúng ta giảm tốc một chiếc xe đang đi nhanh hơn 90 dặm/giờ cho đến khi xe dừng hẳn; vào một thời điểm nào đó trước khi dừng hẳn, xe sẽ có một vận tốc chính xác là 45 dặm/giờ

Bát giác này, với tất cả các góc bằng 45 độ, là đa giác mà chúng ta tìm kiếm. Nếu nối các cạnh theo cách của Hình 47, chúng ta sẽ có được một hình xuyến hai lỗ. Định nghĩa các khoảng cách như chúng được định nghĩa trên bát giác đó, sẽ đem lại một dạng hình học có độ cong âm.

Còn hình xuyến ba lỗ thì sao, hoặc hình xuyến với số lượng lỗ bất kì? Lí luận theo cách tương tự như trên, ta sẽ thấy tất cả các hình này có thể được gán với các dạng mêtric sao cho chúng có độ cong âm không đổi, vì vậy chúng là hyperbolic. Do đó, dạng hình học tự nhiên của "hầu hết" các bề mặt phải là hyperbolic.[141]

---

[141] Cần biết rằng một hình xuyến *n* lỗ có thể được biểu diễn thành đa giác *4n* cạnh với các cặp cạnh lần lượt được xác định theo cùng một kiểu như ở hình xuyến hai lỗ. Đối với độc giả có kiến thức toán học vừa phải, xem thêm Chương 11 của J. Weeks, *The Shape of Space*, 2nd ed (New York, Basel. Marcel Dekker, 2002). Độc giả nào muốn đi sâu hơn về chi tiết toán học, xem J. Stillwell, *Geometry of Surfaces*



Hình 47 Bát giác ở bên trái có các góc lớn hơn 90 độ. Bát giác ở bên phải có các góc bằng 0 độ. Nếu bát giác ở bên trái từ từ to ra các góc của nó sẽ thu nhỏ lại dần, ta sẽ có được một bát giác với các góc bằng 45 độ trước khi nó biến thành bát giác bên phải.

Các nhà toán học tìm ra một kết quả nữa, đó là mọi bề mặt đều mang một dạng hình học tự nhiên và có vẻ đẹp không thể cưỡng lại được. Bốn mươi năm trước đó, họ chỉ biết rằng topo học và hình học vô cùng khác nhau và không thể kết hợp thành một. Bây giờ, họ vỡ lẽ rằng mối liên hệ giữa hai đặc tính này là không thể nào gần gũi hơn được nữa trên các bề mặt hai chiều. Thực tế là hầu hết các bề mặt có dạng hình học hyperbolic - mà ngày nay vẫn còn là bí ẩn - còn càng làm ta kinh ngạc hơn.

Tuy không thể lắp một hình xuyến phẳng vào không gian Euclid ba chiều (mặc dù vẫn có thể lắp nó vừa vặn vào một không gian Euclid ba chiều bằng cách thay đổi độ cong), nhưng với vài năm kiến thức toán học ở bậc đại học (một ít đại số tuyến tính và ba học kì vi-tích phân), ta

---

(New York, Springer-Verlag, 1992) hoặc A. Beardon, *The Geometry of the Discrete Groups* (New York: Springer-Verlag, 1983).

cũng có thể chứng minh rằng hình xuyến đó có thể được lắp vào không gian Euclid bốn chiều sao cho mêtric mà nó có được là mêtric của một dạng hình học phẳng.[142] Hilbert đã chỉ ra rằng không có bề mặt nào có thể được đặt vào trong không gian Euclid ba chiều sao cho nó có một mêtric với độ cong âm không đổi. Đặc biệt, một hình xuyến hai lỗ hyperbolic không thể đặt vào không gian Euclid ba chiều. Ta có thể tự hỏi, liệu có thể đặt mọi bề mặt, hay tổng quát hơn là mọi đa tạp có một dạng mêtric được định nghĩa theo phương pháp của Riemann, vào một không gian Euclid *n*-chiều nào đó sao cho dạng mêtric (do vậy, các khoảng cách) trên đa tạp là giống với dạng mêtric mà nó có được từ không gian Euclid bao quanh nó? Câu hỏi này được biết đến với tên gọi là *bài toán nhúng Riemann*, nó không có lời giải đáp trong nhiều năm. Năm 1956, trong một bài báo phi thường với các kết quả dường như được kéo xuống từ hư không, John Nash đã chứng minh rằng câu trả lời cho các bài toán nhúng tổng quát này là có. Kết quả này làm ông nổi tiếng, nhưng ngay sau đó ông lâm vào trạng thái rối loạn tâm thần nặng. Cuộc đấu tranh chống lại bệnh tâm thần phân liệt

---

[142] Trong thực tế, nếu bạn xem hình xuyến là một vòng tròn đơn vị S^1 trong E^2 và xem hình xuyến $S^1 \times S^1$ là một tập hợp con của $E^2 \times E^2$ (tập hợp này tương tự E^4 bởi một cặp của các cặp số thực là bốn số thực, và ngược lại), do vậy hình xuyến này có được một khoảng cách từ khoảng cách Euclid trong E^4. Nếu bạn thích thú với tính toán, bạn có thể chỉ ra rằng, với khoảng cách này, hình xuyến phải phẳng bằng cách kiểm tra các tam giác bất kì có 180 độ. Trùng hợp thay, theo cùng cách lí luận, tất cả hình xuyến nhiều chiều $S^1 \times \ldots \times S^1$ đều là một mêtric phẳng tự nhiên (natural flat metric).

và việc giành được giải Nobel vì những cống hiến trong kinh tế học của ông là chủ đề của cuốn sách *Tâm hồn đẹp* và bộ phim nổi tiếng cùng tên.[14]

NHỮNG BÀI BÁO VỀ TOPO HỌC VĨ ĐẠI

Poincaré biết đến hình học Phi-Euclid thông qua Beltrami, người đầu tiên nhận ra dạng hình học hyperbolic là hình học có độ cong không đổi và độ cong đó là âm. Beltrami chỉ ra một bề mặt có tên gọi là giả mặt cầu mang dạng hình học này. Ông cũng khám phá ra mô hình đĩa và nhận ra rằng quan niệm của Riemann về hình học cung cấp sợi dây liên hệ thống nhất hai trường phái quan niệm. Poincaré triển khai chi tiết và khám phá ra nhiều mô hình hơn nữa. Thêm vào đó, Poincaré đã không dừng lại ở hai chiều. Ông mở rộng công trình này đến những dạng hình học nhiều chiều hơn. Ông đã mô tả mô hình của ông về không gian ba chiều hyperbolic theo những thuật ngữ của riêng ông:

> "Giả sử một thế giới nằm trong một hình cầu lớn và bị chi phối bởi các quy luật sau: nhiệt độ không phải là đồng nhất mà cao nhất ở chính giữa tâm cầu, và dần dần giảm khi chúng ta di chuyển ra ngoài về phía mặt cầu ngoài

---

[14] Chứng minh cho *định lí nhúng Riemann* xuất hiện trong bài báo của John Nash, "The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds", *Annals of Mathematics* 63 (1956): 20-63. Tiểu sử trích dẫn trong cuốn sách là của Sylvia Nasar, A *Beautiful Mind* (New York: Simon and Schuster, 1998) và bộ phim cùng tên.

cùng, nơi nó co không đô tuyệt đối. Quy luật nhiệt độ này có thể tóm lược như sau. Nếu R là bán kính của hình cầu, và r là khoảng cách của điểm đang xem xét đến tâm hình cầu, thì nhiệt độ tuyệt đối sẽ tỉ lệ với R^2-r^2. Hơn nữa, tôi sẽ giả sử rằng trong thế giới này tất cả các vật thể có cùng một tỉ lệ dãn nở sao cho sự dãn nở này của một vật thể tuyến tính đều tỉ lệ với nhiệt độ tuyệt đối của nó. Cuối cùng, hãy giả sử rằng một vật thể di chuyển từ điểm này đến một điểm khác với một nhiệt độ khác sẽ ngay lập tức có được trạng thái cân bằng nhiệt với môi trường mới của nó. Không có gì trong những giả thuyết này là mâu thuẫn hay không thể tưởng tượng được. Một vật thể chuyển động sẽ càng lúc càng nhỏ hơn khi nó tiến gần về phía mặt biên của hình cầu. Chúng ta hãy quan sát, điều đầu tiên là, mặc dù từ góc nhìn hình học bình thường của chúng ta thì thế giới này có vẻ như hữu hạn, nhưng đối với cư dân của nó thì thế giới này vô hạn. Càng tiếp cận với bề mặt của hình cầu, chúng càng trở nên lạnh hơn, và cùng lúc càng trở nên nhỏ bé hơn. Các bước đi của họ do đó cũng ngày càng ngắn lại, sao cho họ không bao giờ có thể chạm được mặt-cầu-biên của hình cầu. Nếu đối với chúng ta, hình học chỉ nghiên cứu các quy luật mà dựa vào đó các vật rắn bất biến di chuyển, thì đối với những sinh vật tưởng tượng này đó là sự nghiên cứu về các quy luật của sự chuyển động *bị biến dạng bởi sự chênh lệch nhiệt độ...*"

Chúng ta hãy đưa ra một giả thuyết khác: giả sử ánh sáng đi qua các môi trường có độ khúc xạ khác nhau, sao cho độ khúc xạ tỉ lệ nghịch với R^2-r^2. Dưới những điều kiện này rõ ràng là các tia sáng không còn thẳng nữa mà cong tròn... Nếu họ [sinh vật trên một thế giới như vậy] xây dựng một dạng hình học, thì dạng hình học đó sẽ không

> giống như dạng hình học của chúng ta - nếu nghiên cứu về chuyển động của các vật rắn bất biến - họ sẽ nghiên cứu sự dịch chuyển vị trí khác biệt và là "dịch chuyển Phi-Euclid", và vì vậy đó sẽ là dạng hình học Phi-Euclid. Do đó, những sinh vật giống như chính chúng ta, nếu được giáo dục trong một thế giới như vậy, sẽ không có dạng hình học giống như của chúng ta [144]

Trong suốt cuộc đời, Poincaré đã đối mặt với những vấn đề gai góc mà mất gần một thế kỉ, những người khác mới biết cách trân trọng chúng. Sự tiếp xúc đầu tiên của ông liên quan đến mô hình không gian ba chiều hyperbolic mà ông vừa mới bàn đến ở trên. Ông phát hiện ra rằng những tác động của các nhóm con của các chuyển động khác nhau trên mặt cầu ở vô cực phức tạp hơn bất cứ thứ gì mà các nhà toán học đã gặp phải trước đó. Một vài năm sau (1887), vị vua Na Uy và Thụy Điển tuyên bố một cuộc thi toán học cho công trình hay nhất về toán học của Hệ Mặt Trời. Người ta sau đó nhận ra rằng mục tiêu là quá tham vọng. Poincaré gửi một bản báo cáo và qua đó giành được giải thưởng, nhưng sau đó ông phát hiện ra một sai sót trong bài báo đó.[145] Ông đã giả định một loại vận động vô cùng phức tạp và không thể xảy ra, nhưng sau đó ông phát hiện ra rằng kì thực nó có thể. Ông đã khám phá ra

[144] Poincaré, "Science and Hypothesis", *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré*, ed. Stephen Jay Gould (New York: The Modern Library 2001).

[145] Để biết chi tiết, xem bài giới thiệu của D. Goroff trong H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, biên tập và giới thiệu bởi D. Goroff (New York: American Institute of Physics, 1993).

điều mà chúng ta ngày nay gọi là *biểu hiện hỗn loạn* (chaotic behaviour), tiếp theo ông tìm kiếm ngôn ngữ và các công cụ để mô tả và làm cho phù hợp với những gì ông vừa tìm ra. Ngày nay, chúng ta sử dụng thuật ngữ *lí thuyết hỗn loạn* (chaotic theory) để mô tả biểu hiện phức tạp đôi khi không thể hình dung được, là hệ quả từ các quy luật chuyển động đơn giản hoặc các quy tắc đơn giản được ứng dụng một cách lặp đi lặp lại.[146]

Để làm rõ nghĩa những suy tưởng của mình, Poincaré - cũng như Riemann - nhận ra rằng các khái niệm mang tính topo học là thực sự cần thiết. Khi đánh giá lại công trình của mình năm 1901, ông viết:

> "Một phương pháp cho phép chúng ta biết các mối quan hệ định lượng trong một không gian có số chiều lớn hơn ba, có thể, theo một cách nào đó, cung cấp các tác dụng tương tự như các biểu đồ. Phương pháp này chỉ có thể là topo học của các không gian có số chiều lớn hơn ba. Mặc dù vậy, ngành khoa học này cho đến hiện tại vẫn rất ít được khai thác. Sau Riemann, Betti đã đưa vào một số khái niệm cơ bản, nhưng chưa ai tiếp tục công việc của Betti cả. Về phần tôi, tất cả những con đường khác nhau mà tôi liên tục dấn thân đã dẫn tôi đến với ngành topo học. Tôi cần những khái niệm của môn khoa học này để theo đuổi nghiên cứu trên các đường cong định nghĩa bởi các phương trình vi phân, và để mở rộng chúng lên các phương trình vi phân bậc cao hơn và đặc biệt, đến

---

[146] Xem thêm bản phổ biến rất hay dành cho công chúng về lí thuyết hỗn loạn trong James Gleick, *Chaos: Making a New Science* (New York: Penguin, 1988).

vấn đề của các vật thể bậc ba. Tôi cần chúng để nghiên cứu hàm số hai biến không đồng điều. Tôi còn cần chúng trong cả việc nghiên cứu những chu kì của tích phân nhiều lớp và để áp dụng nghiên cứu này vào những khai triển nhiễu loạn. Cuối cùng, tôi đã nhìn thấy trước trong topo học chìa khóa để giải quyết một bài toán quan trọng của lí thuyết nhóm, đó là bài toán nghiên cứu về các nhóm con rời rạc hoặc hữu hạn của một nhóm liên tục."[147]

Nhưng ông không đả động gì đến việc các khái niệm mà ông cần đã vượt xa những gì mà Riemann đòi hỏi, và vượt xa những gì đang có sẵn ở thời điểm đó. Những đóng góp của Poincaré trong ngành topo học là quá lớn lao và vẫn đáng đọc ngay cả với thời nay. Ngoài các thông báo nghiên cứu, chúng còn xuất hiện trong sáu bài báo khoa học bắt đầu từ năm 1895 và kết thúc vào năm 1904. Bài đầu tiên in trong tập đầu tiên của tạp chí trường Bách khoa Paris và đã tạo nền móng cho lĩnh vực này một cách không gò bó chỉ với hơn một trăm trang.[148] Đây là một thành tựu tuyệt đối. Ông đưa ra một số định nghĩa khác nhau của đa tạp: hai định nghĩa đều rất thuận tiện cho các nhà giải tích, định nghĩa thứ ba thuận tiện hơn cho việc tạo ra các ví dụ trong không gian ít chiều đồng

---

[147] Bản đánh giá lại này in trong *Acta Mathematica*, vol. 38, 1921, và được in lại trong toàn tập Poincaré. (*Oeuvres*, 2: 183.)

[148] "Analysis Situs" trong *Journal de l'École Polytechnique* 1 (1895). 1-121. (*Oeuvres*, 2: 193-288.) Analysis Situs lúc đó là tên thường gọi nhưng giờ đã lỗi thời của ngành topo học, có thể được dịch thành "giải tích vị trí", lần đầu tiên được dùng bởi Leibniz.

thời tạo ra cơ sở cho bộ môn mà chúng ta gọi là topo hình học, và định nghĩa thứ tư liên quan đến lí thuyết nhóm. Định nghĩa cuối cùng này trở nên rất quan trọng trong topo đại số - lĩnh vực mà chỉ riêng Poincaré phát minh ra.

Poincaré bàn đến công trình của Betti (người mà ông cũng đã đề cập trong đoạn trích ở trên), một người bạn của Riemann, và có lẽ là người duy nhất lĩnh hội đầy đủ những ý tưởng về topo học của Riemann. Betti đã lấy ý tưởng của việc cắt bề mặt dọc theo các đường cong của Riemann và tổng quát hóa nó thành việc cắt một đa tạp nhiều chiều dọc theo một đa tạp ở bên trong nó. Poincaré, đến lượt mình, tổng quát hóa công trình của Betti và những con số mà Betti gán cho các đa tạp. Ông định nghĩa một *đa tạp con* (submanifold) là một đa tạp bên trong một đa tạp khác (giống như một đường cong bên trong một bề mặt, hay một đường cong hoặc một bề mặt bên trong một đa tạp ba chiều) và xem hai hoặc nhiều đa tạp con là liên quan đến nhau nếu chúng là biên chung của một đa tạp con khác. Ông giải thích lại những con số mà Betti đã đưa ra, ngày nay ta gọi là các *số của Betti*[149], bằng cách giới thiệu các phương trình giữa các đa tạp con của một đa tạp, gọi là các *phép đồng điều* trên một đa tạp,

---

[149] *Số Betti* (Betti number): được đề ra bởi Enrico Betti và Henri Poincaré để phân biệt các không gian topo. Một cách trực giác, số Betti đầu tiên, b_0, của một không gian là tổng số thành phần liên thông hay là tổng số nhát cắt có thể thực hiện trên không gian mà không chia không gian ra thành hai phần. Số Betti thứ hai, b_1 là tổng số các lỗ "tròn" hai chiều và số Betti thứ ba, b_2, là tổng số lỗ hay chỗ trống ba chiều (ND).

thể hiện mối quan hệ về biên trong đa tạp này. Tập hợp tất cả các phép đồng điều độc lập của một số chiều cố định đều được gọi là một nhóm gọi là *nhóm đồng điều* (homology group). Các nhóm đồng điều được phỏng đoán là giống nhau đối với các đa tạp đồng phôi và một khi bạn biết được các nhóm đồng điều bạn sẽ biết được các số Betti và còn nhiều thông tin hơn thế nữa.[150]

Poincaré đã liên kết một đối tượng đại số hoàn toàn mới với mỗi đa tạp, mà ông gọi là *nhóm cơ bản* (fundamental group). Nó bất biến dưới phép đồng phôi và cách mạng hóa hoàn toàn cách nghĩ của chúng ta về đa tạp. Một phần tử của nhóm này là một vòng lặp hình thành tại một điểm cố định trong đa tạp; có nghĩa là, một quỹ đạo xuất phát từ điểm đó và trở lại với chính nó. Nói một cách công thức hơn, đó là một ánh xạ liên tục từ khoảng đơn vị lên đa tạp sao cho cả hai điểm đầu và cuối của khoảng này ánh xạ lên điểm đã cho trong đa tạp. Hai quỹ đạo được coi là tương đương nếu chúng có thể được biến đổi qua lại lẫn nhau theo một cách liên tục sao cho cách này cố định điểm đầu (và vì vậy cũng cố định điểm cuối). Chúng ta có thể nhân hai quỹ đạo bằng cách đi vòng quanh một điểm, sau đó đi vòng quanh điểm khác.

---

[150] Số Betti được coi là bất biến về mặt topo, nhưng thiếu chứng minh nên đã gây ra một chút bối rối. Sự thực về việc số Betti bất biến dưới phép đồng phôi đã phải chờ đợi công trình của James Alexander. Ông chứng minh điều này trong không gian ba chiều vào năm 1913. Ý tưởng đằng sau chứng minh của Alexander nhìn chung là đúng, nhưng phải mất vài năm sau thì Alexander và thầy hướng dẫn O. Veblen mới chứng minh điều này đúng trong trường hợp tổng quát. Ta sẽ bàn đến cả hai người này sau.

Tập hợp tất cả các quỹ đạo như vậy hình thành một nhóm, nhưng là nhóm mà thứ tự của các phần tử trong phép nhân giữa các quỹ đạo có tính chất quan trọng. Ông triển khai cách giúp chúng ta có thể mô tả các nhóm như vậy, và đã đưa ra một sơ đồ, trong đó nhóm này có thể được xem như là tập hợp của tất cả các từ vựng, hay của tất cả các chuỗi chữ cái mà chúng ta có thể tạo ra được từ một tập hợp cho trước các chữ cái. Phép tương đương là khả năng có thể thay thế một vài chuỗi này bằng một số chuỗi khác, và phép nhân là khả năng có thể sáp nhập hai chuỗi kế tiếp nhau. Đối với bất kì nhóm nào, những chữ cái mà chúng ta được phép sử dụng gọi là *phần tử sinh* (generators), và các quy tắc mang tính tương đương được gọi là *các mối quan hệ* (relations).

Poincaré đặc biệt quan tâm đến các đa tạp ba chiều. Những đa tạp này mô phỏng hình dạng mà vũ trụ của chúng ta có thể có. Riemann trước đó chỉ xem xét khối cầu ba chiều, còn Poincaré thì mong muốn tìm hiểu tất cả các đa tạp ba chiều.

Ví dụ, Poincaré coi lớp của tất cả các đa tạp ba chiều thu được bằng cách kết hợp các mặt đối diện của một khối lập phương với nhau theo các cách khác nhau. Ông thu được khối hình xuyến ba chiều đã đề cập trong Chương 4, cũng như một số đa tạp khác (cùng với một đối tượng mà ông chứng minh rằng nó không phải là đa tạp). Ông đã chỉ ra cách xác định các đối tượng là các đa tạp hay không. Ông nghiên cứu các nhóm cơ bản của chúng và chỉ ra rằng các đa tạp này có thể được xem như là không gian mà ta có được nếu ta đồng nhất các điểm

trong không gian ba chiều có thể di chuyển được đến một điểm khác bằng một nhóm đặc biệt (ta nói rằng đa tạp đó được biểu diễn bằng *thương của một nhóm* (quotient of a group) tác động lên không gian ba chiều).

Poincaré đặc biệt chú ý đến việc tìm kiếm một tập hợp của tất cả các phần tử bất biến mà nhờ tập hợp này ta có thể phân biệt được các đa tạp khác nhau (Nói cách khác, vì chúng ta đang sống trong một vũ trụ là một đa tạp ba chiều, nhưng làm thế nào chúng ta có thể chỉ ra đó là đa tạp gì?). Ông chứng minh rằng việc chỉ biết được các số Betti của đa tạp là chưa đủ. Ông đã tạo ra một họ vô hạn của các đa tạp ba chiều đóng không đồng phôi và chỉ ra rằng ta có thể tìm ra các đa tạp không đồng phôi nhưng có các số Betti giống nhau; và trên thực tế, thậm chí có cùng các số Betti với một khối cầu. Ông cung cấp các ví dụ về những đa tạp có các nhóm cơ bản hữu hạn, và nhắc đến một kết quả "có vẻ như mâu thuẫn" (lời của ông), mà dựa vào nó ông hi vọng bài báo của mình sẽ thắp lên vài tia sáng: kết quả này chỉ ra rằng một đa tạp có thể có một nhóm cơ bản phức tạp hơn nhiều so với một đa tạp khác, nhưng lại có số Betti đầu tiên nhỏ hơn. Ông tiếp tục viết:

"Xem xét các câu hỏi sau có lẽ sẽ là thú vị.

1. Cho trước một nhóm G được xác định bởi các phần tử sinh và các mối quan hệ, liệu nó có thể là nhóm cơ bản của một đa tạp *n* chiều không?

2. Làm thế nào ta có thể hình thành nên đa tạp này?

> 3. Liệu hai đa tạp bất kì có cùng số chiều và cùng một nhóm cơ bản có luôn đồng phôi hay không?"
>
> Những câu hỏi này đòi hỏi sự nghiên cứu vất vả và quá trình phát triển lâu dài nên tôi sẽ không bàn chúng ở đây.[151]

Vào buổi bình minh của thế kỉ 20, năm bài báo mà ông gọi là "bổ sung" đã tiếp nối bài báo tuyệt vời của chính ông năm 1895. Tất cả đều xuất hiện trong các tạp chí đỉnh cao.[152] Bài bổ sung đầu tiên vào năm 1899 làm rõ định nghĩa của các số Betti, đáp trả những lời chỉ trích của nhà toán học Đan Mạch Poul Heegaard. Heegaard đưa ra một phản ví dụ, chỉ ra rằng một định lí, bây giờ được gọi là *tính đối ngẫu Poincaré* (Poincaré duality), không thể đúng như đã nêu. Sự việc hóa ra là do định nghĩa của Poincaré khác với định nghĩa của Heegaard, và sự khác biệt đó là rất quan trọng để làm tính đối ngẫu Poincaré có ý nghĩa. Trong bài bổ sung thứ hai, xuất hiện năm 1900, ông đã thảo luận về các *hệ số xoắn*, được phát triển từ các

---

[151] Tương tự *(Oeuvres, 6.258.)*

[152] "Complément à l'analysis situs", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 13 (1899): 285-343. "Second complément à l'analysis situs", *Proceedings of the London Mathematical Society* 32 (1900): 277-308. "Certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'analysis situs", *Bulletin de la Société Mathématique de France* 30 (1902): 49-70. "Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à l'analysis situs", *Journal de Mathématiques* 8 (1902): 169-214 (Liouville's journal). "Cinquième complément à l'analysis situs" *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 18 (1904): 45-110. Tất cả bài báo này, cùng với các thông báo nghiên cứu được in lại trong tập 6 của toàn tập *Oeuvres*.

số Betti, và dùng chúng để mở rộng định lí đối ngẫu mang tên mình. Ông xem xét lại các ví dụ của ông về đa tạp ba chiều. Bài báo thứ ba nghiên cứu một lớp đặc biệt của các bề mặt đại số.[153] Những bề mặt này có hai chiều phức và do đó có bốn chiều thực. Poincaré đưa ra những ý tưởng hoàn toàn mới, bằng cách quan sát sự thay đổi trên các bề mặt hai chiều bên trong một đa tạp khi chúng ta di chuyển xung quanh *các điểm kì dị* (singular points). Bài báo thứ tư mở rộng nghiên cứu này cho các bề mặt đại số bất kì. Trong bài bổ sung thứ năm và là bài cuối cùng, xuất bản năm 1904, Poincaré quay trở lại với các đa tạp ba chiều, cùng với sự hỗ trợ của những công cụ khác mà ông đã có trong tay.

Đa tạp ba chiều đơn giản nhất là khối cầu bậc ba, và rõ ràng là ý tưởng phải mô tả đặc điểm cụ thể của nó đã luôn tồn tại trong suy nghĩ của Poincaré. Trong bài bổ sung thứ hai, ông tưởng rằng mình đã đạt được điều đó. Ông bắt đầu bằng cách hướng về hai bài báo trước đó của ông. "Mặc dù câu hỏi này còn lâu mới được trả lời một cách thấu đáo và chắc rằng tôi sẽ trở lại với nó nhiều lần nữa. Lần này, tôi tự giới hạn mình trong một số sự suy xét nhất định nhằm đơn giản hóa, làm rõ hơn và hoàn thiện hơn các kết quả thu được trước đó."[154] Ông tiếp tục phát triển và cẩn thận vạch ra một quy trình để tính toán các hệ số xoắn mà ông đã định nghĩa trong bài bổ sung thứ

---

[153] Bài báo bổ sung thứ ba nghiên cứu một lớp bề mặt đại số đặc biệt có dạng $z^2=F(x,y)$.

[154] *Oeuvres*, 6:238.

hai và để phác thảo ra định lí đối ngẫu. Tuy nhiên, ông đã đi quá xa.

> "Để không kéo dài công trình này, tôi tự hạn chế mình trong việc chỉ nêu lên định lí sau đây mà chứng minh của nó vẫn đòi hỏi thêm một số công việc mang tính chuẩn bị khác nữa.
> *Mỗi khối đa diện mà tất cả các số Betti của nó đều bằng 1 và tất cả các dãy T_q của nó là song phương thì đồng phôi với hình cầu ba chiều."*[155]

Lịch sử phức tạp của giả thuyết Poincaré bắt đầu như vậy. Poincaré tin rằng ông đã mô tả khối cầu ba chiều. Nhưng *"định lí"* mà ông công bố và cho in nghiêng ra là sai. Ông nhận ra điều này bốn năm sau đó, và dành một bài bổ sung thứ năm để dựng lên một phản ví dụ hoàn mĩ. Bài báo bắt đầu bằng những lời sau đây:

> "Tôi trở lại cùng câu hỏi này (topo học) ngày hôm nay để thuyết phục rằng người ta chỉ có thể thành công bằng những nỗ lực lặp đi lặp lại, và rằng chủ đề này đủ tầm quan trọng để xứng đáng với những nỗ lực đó. Lần này tôi giới hạn bản thân trong việc nghiên cứu về một số đa tạp ba chiều nhất định, nhưng các phương pháp mà tôi sử dụng đương nhiên có thể được ứng dụng một cách tổng quát hơn. Trong quá trình này, tôi trình bày rất dài về các đường cong khép kín mà ta có thể vẽ ra trên các bề mặt khép kín trong một không gian thông thường. Kết quả cuối cùng mà tôi có trong đầu được nêu sau đây. Trong bài bổ sung thứ hai, tôi đã chỉ ra rằng để mô tả cụ

---

[155] *Oeuvres*, 6:270.

> thể một đa tạp, biết số Betti của nó là chưa đủ, nhưng các hệ số nhất định mà tôi gọi là các hệ số xoắn đóng một vai trò quan trọng. Ta có thể hỏi chỉ một sự cân nhắc đến các hệ số này liệu có đủ hay không; nghĩa là, khi tất cả các số Betti và tất cả hệ số xoắn của một đa tạp bằng 1, liệu đã đủ để kết luận đa tạp đó đồng phôi với một khối cầu ba chiều hay chưa? Hoặc, liệu có cần thiết nghiên cứu các nhóm cơ bản của một đa tạp, trước khi khẳng định rằng nó là như vậy? Chúng ta bây giờ có thể trả lời những câu hỏi này; tôi đã xây dựng được một ví dụ. thực vậy, về một đa tạp mà tất cả các số Betti và hệ số xoắn bằng 1, nhưng nó không đồng phôi với khối cầu bậc ba.[158]

Nói cách khác, Poincaré nhắc nhở người đọc rằng nếu ta biết tất cả các số Betti của vũ trụ, ta vẫn chưa thể biết hình dạng của nó. Còn bây giờ ông đặt ra câu hỏi, nếu biết các số Betti và các hệ số xoắn, liệu có thể xác định đa tạp đó hay không? Không, ông nói. Ông đưa ra ví dụ của một đa tạp có cùng các số Betti và các hệ số xoắn giống như khối cầu ba chiều, nhưng không phải là khối cầu ba chiều. Điều này gây ngạc nhiên; trong bài bổ sung thứ hai, Poincaré đã từng tuyên bố rằng ông không nghĩ điều này là có thể.

Vậy ví dụ của Poincaré là gì? Trong bài bổ sung thứ năm, ông mô tả nó như là hai hình xuyến rắn có hai lỗ dán với nhau theo một cách thích hợp (theo *sơ đồ Heegaard*), và cẩn thận mô tả một cặp quỹ đạo không thể co lại thành một điểm. Đa tạp này kể từ đó được gọi là

[158] *Oeuvres*, 6:435.

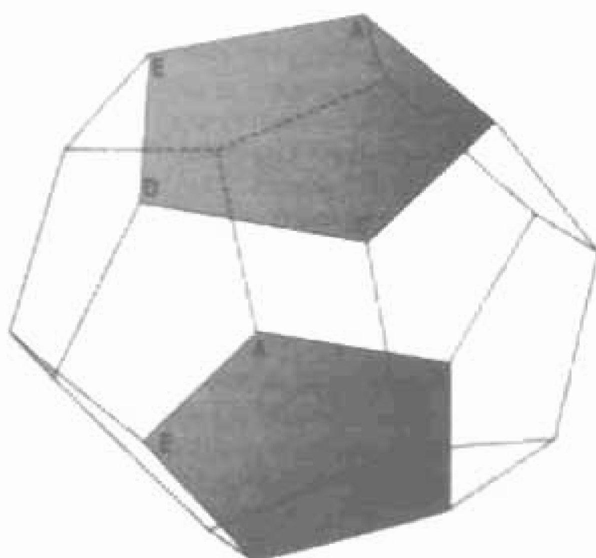
không gian khối mười hai mặt Poincaré (Hình 48), và ngày nay thường được mô tả như một đa tạp bậc ba có được bằng cách dán các mặt đối diện của một hình khối đều mười hai mặt với nhau theo một phần mười vòng tròn ngược chiều kim đồng hồ.[157] Xin nhắc lại rằng một hình

---

[157] Poincaré chắc chắn không biết không gian mà ông khám phá có thể được mô tả bằng cách xác định các mặt đối diện của một hình khối mười hai mặt. Mô tả này được in trong C. Weber and H. Seifert, "Die beiden Dodekaedräume", *Mathematische Zeitschrift* 37, no. 2 (1933): 237. Xem thêm một mô tả khác hay, dễ đọc về hai không gian mười hai mặt trong bài báo của Jeff Weeks, *The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three-Dimensional Manifolds* (New York: Marcel Dekker, 1985). Ấn bản thứ hai xuất hiện vào năm 2002. Tôi muốn giới thiệu cuốn sách này đến mọi đối tượng. Cuốn sách này dễ đọc cả cho những người không phải là nhà toán học, và đặc biệt cho các học sinh trung học muốn tìm hiểu thêm. Một cách mô tả chi tiết *không gian khối mười hai mặt Poincaré* khác nghiêng về hình học hơn sử dụng mặt cầu hai chiều có bán kính một đơn vị. Nghĩa là, chúng ta xem mỗi hình khối mười hai mặt như một điểm. Điều này tương tự như xem không gian ba chiều là tập của tất cả bộ ba số thực. Không gian của tất cả các hình khối mười hai mặt trên một mặt cầu đơn vị là ba chiều, bởi vì nó cần hai tham số để xác định một đỉnh trên mặt cầu hai chiều, và tham số thứ ba để mô tả hướng mà bạn phải hướng tới để có được đỉnh kế tiếp. Nói cách khác, xác định được ba tham số là xác định được một hình khối mười hai mặt. Để có được một đường cong không thể co rút thành một điểm, ta cần xem xét tập hợp các hình khối mười hai chiều có một đỉnh cố định. Điều này tương ứng với việc vượt qua tất cả các góc giữa 0 và 120 độ từ đỉnh cố định: các hình khối mười hai mặt có được tại điểm đầu (không độ) và điểm kết thúc (120 độ) là giống nhau. Xem thêm, J. Milnor, "The Poincaré Conjecture One Hundred Years Later" (www.math.sunysb.edu/~jack) và "Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of Three Manifolds", *Notices of the American Mathematical Society* 50, no. 10 (2003): 1226-33. Milnor mô tả nó giống như không gian của hình khối mười hai mặt

khối mười hai mặt đều là khối đa diện mười hai mặt ta có được bằng cách đính mười hai ngũ giác đều có cùng kích thước để tạo ra một bề mặt khép kín bao bọc một vật rắn. Đây là vật rắn kiểu Platon thứ năm và là cuối cùng. Những người thuộc trường phái Pythagoras hẳn đã rất vui mừng.

Năm mươi ba trang sau, Poincaré đã kết luận trong bài báo bổ sung thứ năm:



Hình 48. Không gian khối mười hai mặt của Poincaré. Nối các mặt đối diện sau khi quay ngược chiều kim đồng hồ một phần mười vòng tròn.

"Do có hai vòng lặp trên đa tạp không tương đương với một điểm, đa tạp này không thể đồng phôi với khối cầu.

Nói cách khác... [Ông trình bày lại, giải thích rằng nhóm cơ bản của nó không phải là đồng nhất thức].

Vẫn còn một câu hỏi cần phải xử lí: liệu có xảy ra trường hợp nhóm cơ bản của một đa tạp có thể là đồng

---

đều nằm trên mặt cầu hai chiều.

nhất thức và đồng thời đa tạp đó vẫn có thể không đồng phôi với khối cầu ba chiều hay không? [Đây chính là giả thuyết Poincaré.].

Nói cách khác... [Ông cẩn thận giải thích, dựa vào các ví dụ mà ông đã xây dựng, cần phải làm những gì để có được một đa tạp như vậy].

Nhưng câu hỏi này sẽ đưa chúng ta đi quá xa."[158]

"Vẫn còn một câu hỏi cần phải xử lí" - là câu hỏi "Liệu nhóm cơ bản của một đa tạp có thể là đồng nhất thức và đồng thời đa tạp đó vẫn có thể không đồng phôi với hình cầu ba chiều hay không?" - gần như ngay lập tức được biết đến với tên là *giả thuyết Poincaré.* Poincaré đã định nghĩa nhóm cơ bản của một đa tạp là tập hợp của tất cả các vòng lặp tại một điểm trong đa tạp, trong đó hai vòng lặp được xem là giống nhau nếu như vòng lặp này có thể biến hình dạng để trở thành vòng kia. Đồng nhất thức là một vòng lặp ở lại một điểm duy nhất mà không đi đâu cả. Một vòng lặp tương đương với đồng nhất thức nếu và chỉ nếu nó có thể co rút thành một điểm. Do đó, nói nhóm cơ bản là đồng nhất thức tức là nói rằng tất cả các vòng lặp trong đa tạp có thể co rút thành một điểm. Trong bài báo đầu tiên của mình, Poincaré đã lưu ý rằng, điều nay đúng với các khối cầu ba chiều. Ông đồng thời đặt ra câu hỏi liệu có tồn tại một đa tạp không đồng phôi với khối cầu ba chiều, mà mỗi vòng lặp bên trong của nó có thể co rút thành một điểm.

[158] *Oeuvres, 6:498.*

Câu hỏi này là rất tự nhiên, và về bản chất là rất thú vị. Đây là một trong những điều đầu tiên mà ta sẽ thắc mắc khi gặp phải khái niệm đa tạp ba chiều và nhóm cơ bản. Ngay cả khi không có Poincaré, nó vẫn sẽ cuốn hút các nhà nghiên cứu. Nhưng rõ ràng là Poincaré đã xem nó như là trọng tâm. Ông quay trở lại vấn đề này hết lần này đến lần khác. Đầu tiên ông đã hiểu sai về nó. Đó chính là câu hỏi "sẽ đưa chúng ta đi quá xa", câu hỏi được nêu lên trong mệnh đề cuối cùng của loạt bài báo vĩ đại của ông. Sự thực là các nhà toán học vĩ đại nhất sống cùng thời đó đã không thể tìm ra đáp án, điều này hứa hẹn đem lại sự nổi tiếng cho bất kì nhà toán học nào thuộc thế hệ sau giải quyết được câu hỏi này.

11

Những nhà bác học khổng lồ

Khi thế kỉ mới bắt đầu, Paris vẫn là thủ đô xã hội và văn hóa của thế giới. Ở đây tập trung số lượng lớn nhất các nhà toán học. Nổi bật nhất là Henri Poincaré, nhà toán học nổi tiếng nhất thế giới đương thời. Đứng trên đỉnh Olympic của kim tự tháp khoa học Pháp và thế giới, Poincaré đã tiếp cận với tất cả những ý tưởng hay nhất và nắm giữ trong tay những thành tựu khoa học vĩ đại nhất của thời đại. Các công trình của ông bao trùm gần như toàn bộ các lĩnh vực toán học và một phần lớn của vật lí. Giữa các năm 1901 và 1912, Poincaré được đề cử không ít hơn 49 lần cho giải Nobel, nhiều hơn bất kì nhà khoa học nào trước đó và sau này.[159]

Poincaré triệt để từ chối bất kì ràng buộc hay nhiệm vụ chính trị nào, nhưng dường như không bao giờ từ chối

[159] Số lần đề cử giải Nobel rút ra từ Mawhin, "Henri Poincaré. A Life in the Service of Science", *Notices of the American Mathematical Society* 52 (2005): 1036-44. Đây là bản in bài diễn thuyết trong Hội thảo Poincaré tại Brussels, 8-9 tháng 10, 2004, trong dịp tổ chức mừng sinh nhật lần thứ 150 của Poincaré.

nhiệm vụ quản lí hay phục vụ khoa học. Tính khiêm tốn và khiếu hài hước tinh tế của ông đem lại sự tương phản mới mẻ với tính cách cau có của một số đồng nghiệp ít thành tựu hơn. Ông là thành viên của Ủy ban Triển lãm Quốc tế Paris (ủy ban đã đem lại cho chúng ta Tháp Eiffel) và là người đứng đầu Phòng Kinh tuyến rất quan trọng. Người ta tham khảo ý kiến ông ngày một nhiều hơn trong mọi quyết định lớn về chính sách khoa học. Poincaré còn được bổ nhiệm vào Ủy ban Điều tra Giá trị khoa học của các bằng chứng được phơi bày trong vụ Dreyfus làm rung chuyển nước Pháp thời đó.

Tới lúc đó, danh tiếng của Poincaré đã lan xa trong công chúng nước Pháp. *Khoa học và giả thuyết*, cuốn sách đầu tiên của ông viết cho độc giả đại chúng, bán được hơn 16.000 bản tại Pháp trong mười năm đầu tiên sau lần xuất bản đầu tiên vào năm 1902. Thành công của nó đã dẫn tới lời nói đùa dí dỏm quen thuộc đối với tất cả học sinh Pháp, "Quest-ce un Cercle? Ce n'est point carré?" (Một vòng tròn là gì? Nó không vuông một chút nào?), bởi vì "point carré" có phát âm giống "Poincaré". Cuốn sách sau đó đã được dịch sang 23 thứ tiếng. Cuốn sách thứ hai hướng tới đại chúng xuất hiện ba năm sau, và cuốn thứ ba vào năm 1908.[160] Những cuốn sách này, với

---

[160] *Science and Hypothesis* là bản dịch tiếng Anh của *La Science et l'hypothèse* được in lần đầu năm 1902. Bản chỉnh lí in vào năm 1906 và hiện nay vẫn còn được phát hành. *La Valeur de la science* (dịch sang tiếng Anh năm 1958 dưới tên *The Value of Science*) được in năm 1905. Cuốn cuối cùng của bộ ba *Science et Méthode* (dịch sang tiếng Anh là *Science and Method*) phát hành năm 1908. Bản dịch tiếng Anh

phong cách văn xuôi có duyên của Poincaré, đã giúp cho tác giả của chúng được bầu vào chiếc ghế bỏ trống của Sully Prudhomme ở Viện Hàn lâm Pháp. Thời đó và kể cả ngày nay, được bầu vào một trong bốn mươi ghế của Viện Hàn Lâm có lẽ là giải thưởng cao quý nhất được trao tặng cho một trí thức Pháp. Được bầu vào cả Viện Hàn lâm Khoa học và Viện Hàn lâm Pháp là điều cực kì hiếm.[161]

Một số phê bình chỉ trích rằng công trình của Poincaré có nhiều lỗi và rằng ông đã không cẩn thận. Không có điều gì là sự thật. Khác hẳn với những lời chỉ trích, Poincare quay trở lại các chủ đề cũ khi ông hoặc người khác tìm thấy sai sót trong các kết quả của mình. Ông tự hào về sự lao động của mình và sẽ không

---

của bộ ba cuốn sách này có tựa đề *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré* (New York. Random House, 2001). Cuốn sách xuất bản sau khi ông mất *Dernières Pensées* được in năm 1913 (dịch sang tiếng Anh thành *Mathematics and Science: Last Essays* năm 1963).

[161] Học viện Pháp quốc (Institut de France) được thành lập năm 1795, hai năm sau khi các hội học thuật được thành lập vào giữa thế kỉ 17 bị giải tán trong cuộc Cách mạng Pháp Học viện này gồm năm viện thành viên, Viện Hàn lâm Pháp (40 thành viên, ngôn ngữ và văn học, thành lập năm 1635 bởi Đức Hồng y Richelieu), Viện Hàn lâm Mĩ thuật (55 thành viên, thành lập năm 1816 bằng cách thống nhất Viện Hàn lâm Hội họa và Điêu khắc, thành lập năm 1648, và Viện Hàn lâm Âm nhạc, được thành lập năm 1671), Viện Hàn lâm Cổ ngữ (55 thành viên, lịch sử và khảo cổ học, thành lập năm 1663), Viện Hàn lâm Khoa học (190 thành viên, y học, toán học và khoa học, thành lập năm 1666), và Viện Hàn lâm Khoa học đạo đức và chính trị (50 thành viên, thành lập năm 1795, giải tán năm 1803, tái lập năm 1832).

công bố cho đến khi ông giải quyết được vấn đề một cách thỏa mãn. Mặc dù đúng là ông ít khi hiệu đính những gì ông đã viết, nhưng đó không phải là vì ông ít để ý, mà là do ông thiếu kiên nhẫn. Với rất nhiều ý tưởng, mà lại có quá ít thời gian, hiệu đính là một sự xa xỉ mà ông không muốn đầu tư vào. Điều kì diệu là Poincaré xuất bản liên tục, ngay cả sau khi ông đã có đủ mọi yếu tố cần thiết để tạo danh tiếng cho mình. Hầu như tất cả những gì ông xuất bản đều được nghiên cứu kĩ lưỡng. Các nhà toán học bám riết vào từng từ của ông. Nếu ông quan tâm đến công trình của một nhà toán học khác ở bất cứ điểm nào, thì điều đó sẽ thúc đẩy sự nghiệp của người đó. Ngược lại, tìm hoặc sửa chữa một lỗ hổng trong lập luận của Poincaré cũng sẽ đẩy mạnh sự nghiệp của ai đó. Ông có thể được tôn kính, nhưng đồng thời cũng là một mục tiêu tấn công. Áp lực chắc hẳn là rất lớn, và ta chỉ có thể ngưỡng mộ lòng can đảm đã cho ông sức mạnh để tiếp tục xuất bản.

Các bài báo topo học của ông là một trường hợp minh chứng cụ thể. Chúng có nguồn gốc từ một sai sót mà Poincaré mắc phải trong đệ trình của ông về tính ổn định của vũ trụ. Nhà toán học người Đan Mạch, Poul Heegaard, làm nên tên tuổi của mình bằng cách đưa ra một phản ví dụ cho phiên bản đầu tiên của định lí đối ngẫu Poincaré. Mong muốn sửa chữa định lí này của Poincaré đã tạo ra cơ hội cho bài báo bổ sung thứ nhất ra đời. Bài bổ sung thứ năm, và cùng với nó là giả thuyết Poincaré, ra đời cũng là vì người đàn ông Pháp này tự phát hiện ra một lỗi trong công trình của mình. Cho dù

không gian khối mười hai mặt của ông đẹp đẽ như thế nào đi nữa, trong một thế giới mà mỗi từ của ông đều bị soi xét, thì những sai sót rõ ràng như vậy ắt hẳn đã phải làm Poincaré đau đớn lắm. Không rõ ông có đề cập đến tâm trạng này trong cuốn sách của mình hay không, nhưng rõ ràng nó có ảnh hưởng đến văn phong của ông. Trong cuốn *Giá trị khoa học*, ông viết một cách cảm động về sự kiên trì theo đuổi hành trình của mình.

"Tìm kiếm chân lí phải là mục đích của các hoạt động của chúng ta, bởi vì đó là kết quả duy nhất tương xứng... Nhưng thỉnh thoảng chân lí làm ta sợ hãi... Chúng ta cũng biết rằng chân lí thường nghiệt ngã biết dường nào, và ta tự hỏi liệu ảo tưởng không làm ta dễ chịu hơn sao, vâng, hay thậm chí làm tăng thêm sức mạnh của chúng ta, bởi ảo tưởng cũng là thứ đem lại niềm tin... Đó là lí do tại sao nhiều người trong chúng ta sợ hãi chân lí, chúng ta xem nó như là một nguyên nhân gây ra sự yếu đuối. Tuy nhiên, chân lí không đáng sợ bởi chỉ riêng nó là đẹp... Khi tôi đề cập đến chân lí ở đây, không nghi ngờ gì, cái tôi muốn nói đến đầu tiên là chân lí khoa học. Nhưng tôi cũng ám chỉ chân lí đạo đức mà trong đó điều mà chúng ta gọi là công lí chỉ là một khía cạnh. Dường như tôi đang lạm dụng từ ngữ khi gộp hai khái niệm hoàn toàn không có điểm chung vào một cái tên, vì chân lí khoa học là thứ đã được chứng minh, không thể theo bất kì cách nào kết nối với chân lí đạo đức, thứ mà ta cảm nhận. Tuy nhiên, tôi cũng không thể tách rời hai khái niệm này, và một khi ai đó đã tôn thờ chân lí này thì cũng không thể nào không yêu chân lí kia. Để tìm ra chân lí này, cũng như để nhận thấy chân lí kia, ta phải

giải phóng tuyệt đối tâm hồn khỏi định kiến và khỏi tham vọng, để đạt đến sự chân thật tuyệt đối. Cả hai dạng chân lí này đều đem lại hạnh phúc giống nhau một khi khám phá ra, *cả hai khi ta lĩnh hội được, đều sáng chói một thứ ánh sáng rực rỡ giống nhau mà ta hoặc phải nhìn thẳng hoặc phải nhắm nghiền mắt*, chúng không bao giờ cố định; khi ta tin rằng đã chạm tới chúng, ta nhận thấy mình vẫn phải tiếp tục bước lên phía trước, những ai muốn theo đuổi chúng đều phải chấp nhận hình phạt là không bao giờ được biết đến sự nghỉ ngơi. Cũng cần phải nói thêm rằng những ai sợ chân lí này thì chắc chắn cũng sợ chân lí kia, bởi những người này chỉ quan tâm trước hết đến những hệ quả. Tóm lại, tôi muốn sáp nhập hai chân lí lại, bởi những lí do chung làm chúng ta yêu chúng và cũng những lí do đó làm ta sợ chúng."[162]

TOPO HỌC VÀ GIẢ THUYẾT POINCARÉ

Người ta nói rằng Poincaré không phát minh ra topo học, nhưng ông đã đem lại cho nó đôi cánh. Điều này chắc chắn đúng, nhưng gần như là đã nói giảm đi. Sáu bài báo về topo học vĩ đại của ông đã tạo ra lĩnh vực topo đại số, gần như từ con số không. Môn nghiên cứu mới này sẽ đưa đến những thành công lớn nhất của toán học thế kỉ 20. Poincaré viết để người khác hiểu ông, sử dụng rất nhiều ví dụ, dường như theo một phong cách dễ đọc ngay cả so với các tiêu chuẩn của ngày nay. Tuy nhiên,

[162] Poincaré, Lời giới thiệu, *The Value of Science*, dịch sang tiếng Anh bởi G. B. Halstead, 189-90.

đối với các nhà toán học thời đó, một số lượng lớn những ý tưởng mới và thiên tài làm cho việc đọc các bài báo topo học của ông giống như việc uống nước từ một vòi cứu hỏa. Trực giác giúp ông vượt xa ra khỏi các lĩnh vực nghiên cứu đã được biết đến với một nền tảng vững chắc. Từng kết quả trên từng trang giấy lôi kéo người ta vào bãi đá ngầm nguy hiểm của trí tuệ mà để chinh phục được chúng đòi hỏi phải có nỗ lực nhất định của hàng chục nhà toán học. Lĩnh vực topo tổng quát và topo tổ hợp phát triển phần nào đó như là nỗ lực giúp những người khác dạo chơi trong các khu vực mà Poincaré đã là người đầu tiên đặt chân tới.

Là mệnh đề kết thúc của bài báo bổ sung thứ năm và là bài cuối cùng, giả thuyết Poincaré đã tạo ra một ảnh hưởng mang tính chất thần bí đối với các nhà toán học. Đây là câu hỏi đơn giản nhất nảy sinh trong quá trình suy nghĩ về hình dạng vũ trụ. Đối với những người đã mạo hiểm xông vào các bài báo topo học, câu hỏi này trở thành một nỗi ám ảnh. Nạn nhân đầu tiên, trừ bản thân Poincaré, là một nhân vật lỗi lạc, Max Dehn.

Dehn tạo nên tuổi của mình khi còn là sinh viên tại Göttingen bằng cách giải quyết bài toán thứ ba trong danh mục 23 bài toán nổi tiếng mà Hilbert đề xuất năm 1900.[n] Dehn chỉ ra rằng ta không thể cắt một khối tứ diện thành một số hữu hạn các mảnh nhỏ với lát cắt

[n] Dehn bắt đầu là sinh viên của Hilbert tại Göttingen năm 1899. Năm 1900, Hilbert trình bày danh mục các bài toán tại một hội thảo ở Paris. Danh mục ngay lập tức trở nên nổi tiếng ngay ngày hôm sau.

phẳng rồi dán các mảnh với nhau để tạo thành một khối lập phương. Đây là một bài toán không có lời giải từ thời Euclid, cả Gauss và Hilbert đã tìm cách giải quyết nó nhưng không thành công. Một hệ quả từ công trình của Dehn là ta không thể định nghĩa thể tích của một khối đa diện mà thiếu đi một số lượng vô hạn các phép dựng.[164]

Tại Göttingen, Dehn có sở thích xây dựng chặt chẽ các định nghĩa và tiên đề hóa các lí luận. Phản ví dụ của Heegaard chống lại phát biểu đầu tiên của Poincaré về định lí đối ngẫu Poincaré đẩy Poincaré nghiêng hơn về các định nghĩa mang tính tổ hợp nhiều hơn của các đa tạp và các nhóm đồng điều mà chính chúng sau đó cũng được xây dựng theo hướng tiên đề. Dehn và Heegaard

---

[164] Bạn có thể tính toán diện tích đa giác trên mặt phẳng bằng cách chia chúng ra thành một số hữu hạn các tam giác và cộng tất cả diện tích của chúng lại. Nếu cẩn thận, bạn thậm chí có thể xây dựng một định nghĩa diện tích cho các mặt phẳng đa giác vẽ bằng cách này. Công trình của Dehn chỉ ra rằng bất kì phương pháp tiếp cận nào như vậy trong không gian ba chiều cũng là ngu ngốc. Ngay cả đối với các đa giác cơ bản nhất, bạn cũng phải cần cộng thể tích của vô số vật thể, và do đó, cần đến vi-tích phân. Chứng minh của ông cực kì xuất sắc. Ông tìm thấy một bất biến không thể phân tích được cho phép ông đúc kết lại thành bài toán trong lí thuyết số cơ sở mà ông có thể giải (Xem sự phát triển thận trọng của bất biến Dehn trong Dupont và Sah, "Scissors Congruences", *Journal of Pure and Applied Algebra* 25 (1982): 159-95). Bất biến Dehn thực sự đóng một vai trò trong lí thuyết đa tạp bậc ba ngày nay. Sử dụng thực tế là đa tạp bậc ba có thể được định nghĩa bằng cách xác định các mặt của một khối đa diện, Thurston điều chỉnh các bất biến Dehn để tạo thành một bất biến hình học của đa tạp. Độ cứng Mostow sau đó ngụ ý rằng bất biến hình học cũng là bất biến topo.

gặp nhau tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Heidelberg năm 1904 và bắt đầu làm việc cùng nhau.[165] Họ cùng viết một bài báo, một cách cẩn thận và rất trừu tượng, đặt ra những nền tảng của ngành topo tổ hợp cho dự án *Bách khoa toàn thư Kiến thức toán học* mà Klein đảm trách.[166] Bài báo xuất hiện năm 1907 đưa ra sự phân loại tuyệt đối nghiêm ngặt đầu tiên các bề mặt. Nó cũng chứa đựng một cách hiểu sai về phép dựng không gian khối mười hai mặt của Poincaré: các tác giả đã phạm phải một sai sót mà Poincaré đã tránh được. Ví dụ mà họ thay thế cho ví dụ của Poincaré thực ra là khối cầu bậc ba, không phải là không gian khối mười hai mặt. Sai sót này của họ càng làm rõ hơn sự tinh tế trong phép dựng của Poincaré. Ông ắt hẳn đã phải thử nhiều phương án khác nhau để tìm ra ví dụ cụ thể của mình.

---

[165] Thời điểm chính xác khi Dehn gặp Heegaard không rõ ràng. Xem J. Stillwell, "Max Dehn", 965-78, trong *History of Topology* ed. I. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999). Theo Stillwell (p. 968), họ gặp nhau vào năm 1903 hoặc 1904. Bài điếu văn của Johannson viết rằng Heegaard nói họ gặp nhau tại Kassel năm 1903, nhưng vợ của Dehn, Toni nói với Magnus rằng họ gặp nhau lần đầu tiên tại Đại hội Toán học Thế giới ở Heidelberg năm 1904.

[166] M. Dehn và P. Heegard, "Analysis Situs", in *Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften* III AB 3 (Leipzig: Teubner, 1907), 153-220. Bài báo này được viết vào năm 1905 và chứa đựng một chứng minh chi tiết của lí thuyết phân loại các bề mặt compac được phát hiện bởi Mobius trong trường hợp định hướng được, và bởi Dyck trong trường hợp tổng quát. Một ghi chú ở phần đầu nói, "Heegaard tiến hành thu thập tài liệu cho bài viết, cũng như triển khai các phần cần thiết. Trách nhiệm về bài viết cuối cùng thuộc về Dehn."

Dehn rất ấn tượng với bài báo năm 1904 của Poincaré và trở lại với nó trong suốt cuộc đời của mình. Năm 1908, Dehn tưởng rằng ông đã thành công trong việc chứng minh giả thuyết Poincaré. Trên thực tế, ông đã gửi chứng minh của mình đến tạp chí *Mathematische Annalen*, và viết cho Hilbert thúc giục ông mau chóng xuất bản để phòng ai đó có thể sẽ làm trước. Ai đó có thể là ai? "Chẳng hạn như Poincaré", ông viết. Tuy nhiên, sau khi trao đổi với nhà topo học Heinrich Tietze vào năm 1908 tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Roma, Dehn nhận ra rằng phương pháp suy luận của ông có sai sót, do đó rút lại bài báo của mình.[167]

Không gian khối mười hai mặt của Poincaré là ví dụ đầu tiên về một đa tạp bậc ba mà các nhóm đồng điều của nó giống với những nhóm đồng điều của khối cầu bậc ba, nhưng không đồng phôi với khối cầu bậc ba. Lúc đó, mô tả đơn giản ví dụ này bằng cách đồng nhất các mặt đối diện của một hình khối mười hai mặt lại với nhau chưa có sẵn, và không gian dường như hoàn toàn là bí ẩn. Các đa tạp như vậy được gọi là các khối cầu đồng điều và dường như đến từ hư không. Phải chăng có nhiều hơn các đa

[167] Moritz Epple chỉ ra rằng Dehn đã cố gắng chứng minh giả thuyết Poincaré vào năm 1908 và nghĩ ông đã thành công (Stillwell, 969). Tietze tìm ra một sai sót trong chứng minh của Dehn và bài báo đã được rút xuống. Như Volkert nói, Dehn gần như trở thành 'nạn nhân đầu tiên của giả thuyết Poincaré." (Xem K. Volkert, "The Early History of Poincaré's conjecture", trong *Henri Poincaré, Science and Philosophy*, eds. J. L. Greffe, G. Heinzmann, and K. Lorenz [Berlin: Akademie-Verlag and Paris: Albert Blanchard, 1996], 241-50).

tạp như vậy? Và, nếu đúng, liệu có cách nào để tìm ra chúng?

Để tạo ra các ví dụ, Dehn phát minh ra tiền thân của điều mà hiện nay chúng ta gọi là giải phẫu Dehn. Để mô tả điều này, đầu tiên hãy nhớ lại rằng một khối cầu bậc ba có thể được tư duy như là hai quả bóng đặc đính vào nhau bằng cách sáp nhập lại các điểm nằm trên mặt cầu bao bọc các quả bóng đó. Bạn có thể thấy điều này qua một quả bóng đặc nằm trong khối cầu bậc ba. Bởi vì khối cầu bậc ba có thể được xem như là kết quả của việc gắn hai quả bóng đặc với nhau bằng cách dán chúng lại dọc theo biên của chúng (xem Chương 4), khu vực bên ngoài quả bóng đó cũng là một quả bóng đặc. Tương tự, nếu chúng ta lấy một hình xuyến đặc (không thắt nút) trong khối cầu bậc ba, thì khu vực bên ngoài hình xuyến này cũng là một hình xuyến rắn. Giải phẫu Dehn là quá trình cắt bỏ một hình xuyến rắn ra khỏi khối cầu bậc ba và nối nó lại theo cách khác. Để làm điều này, chúng ta chỉ cần chiếu bề mặt hình xuyến bao bọc hình xuyến đặc mà chúng ta vừa cắt ra lên bề mặt hình xuyến (giống hệt nó) bao bọc phần còn lại. Có rất nhiều cách khác nhau cơ bản để thực hiện cùng một việc này. Ví dụ, chúng ta có thể cắt một bề mặt hình xuyến dọc theo một đường viền, xoắn lại một vòng hoàn chỉnh (hoặc nhiều) rồi sau đó nối nó với khối rắn hình xuyến gốc. Hãy nghĩ về một bác sĩ phẫu thuật ghép cơ thể người, mở toang cơ thể ai đó, cắt qua ruột, xoắn lại một vòng, rồi khâu nó lại và đóng vết mổ. Cũng như một người có thể nhận thấy chính mình đang gặp một số khó khăn sau khi trải qua một quy trình

như vậy, kết quả có được sau giải phẫu Dehn có thể sẽ không đồng phôi với khối cầu bậc ba.

Năm 1910, Dehn và Heegaard xuất bản một bài báo nổi tiếng sử dụng giải phẫu Dehn để tạo ra một chuỗi vô hạn các đa tạp bậc ba là các khối cầu đồng điều.[168] Bài báo kết thúc bằng việc phác thao một lập luận mà họ hi vọng sẽ dẫn đến chứng minh cho giả thuyết Poincaré, nhưng đồng thời, họ cũng chỉ ra một lỗ hổng quan trọng cản trở lập luận này. Cả hai tác giả rõ ràng đã tin rằng giả thuyết Poincaré là sự thật. Bài bao này đã khiến cho phần còn lại của cộng đồng toán học hiểu rõ ràng là, dù đúng hay không, phỏng đoán này là rất khó.

Bài báo ra đời năm 1910 này thú vị bởi một số lí do. Nó chỉ ra rằng có một mối liên hệ giữa các khối cầu đồng điều va hình học Phi-Euclid.[169] Nó cũng nghiên cứu một số liên hệ giữa lí thuyết thắt nút và các đa tạp bậc ba. Một trong những kết quả nổi bật nhất của no dược dựa vào một kết quả nổi tiếng, nay được gọi là bổ đề Dehn, mà Dehn tưởng rằng ông đã chứng minh được. Tuy nhiên, sau đó người ta đã tìm ra lỗ hổng trong chứng minh của ông và bổ đề Dehn chỉ được chứng minh hoàn toàn vào năm 1957.[170]

---

[168] M. Dehn, "Über die Topologie des dreidimensionale Raumes", *Mathematische Annalen* 69 (1910): 137-68.

[169] Chính xác hơn. Dehn chỉ ra rằng các nhóm cơ bản của các khối cầu đồng điều hoạt động trên mặt phẳng hyperbolic theo một cách hợp quy tắc.

[170] Bổ đề Dehn nói rằng nếu một đường cong khép kín trong khối cầu bậc ba giáp với một đĩa liên tuc cắt khúc theo một cách mà một

Tietze, nhà toán học cẩn trọng, người đã ngăn Dehn xuất bản chứng minh sai sót của ông về giả thuyết Poincaré, là một trong những nhân vật tầm cỡ của bộ môn topo học non trẻ. Sinh ra ở Áo, ông quan tâm đến topo học nhờ nhà lí thuyết hàm số người Áo, Wilhelm Wirtinger. Về phần Wirtinger, ông chịu ảnh hưởng mạnh từ Klein và quan tâm rộng rãi đến các ngành toán học, đã bắt đầu sử dụng phương pháp topo học để khảo sát các hàm số hai biến phức có định nghĩa ẩn trong một đa thức ba biến phức. Luận án *Habilitation* của Tietze cung cấp một giải trình sáng suốt và một cách tiếp cận theo phương pháp tổ hợp mang tính chặt chẽ về các đa tạp bậc ba. Tietze cũng chỉ ra một số câu hỏi cơ bản mà công trình của Poincaré chưa giải quyết được, và đề ra các phân biệt quan trọng cho sự phát triển của lĩnh vực mới nổi lên này.[171]

---

vành khuyên dọc theo biên không có điểm kì dị thì đường cong đó thực sự giáp với một đĩa nhúng đều. Chứng minh đúng chỉ được tìm ra vào năm 1957 bởi nhà toán học Hi Lạp C. D Papakyriakopoulos ("On Dehn's lemma and the asphericity of knots", *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.* 43 [1957]: 169-72 và *Annals of Mathematics* 66 [1957]. 1-26). Bổ đề này được dùng để giới thiệu một tiêu chí mới cho sự thắt nút (đó là, một đường cong khép kín là không thắt nút khi và chỉ khi nhóm cơ bản của phần bù của nó là nhóm Abel). Bổ đề Dehn cho phép ta giải thích mối liên hệ trong các nhóm cơ bản một cách hình học dựa vào các đĩa giáp với các vòng lặp biểu diễn các thành phần.

[171] H. Tietze, "Über die topologischen Invarianten mehrdimensional Mannigfaltigkeiten", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 19 (1908): 1-118. Bài báo này quan trọng trong việc phổ biến các ý tưởng topo của Poincaré. Tietze nhấn mạnh tầm quan trọng của nhóm cơ bản trong việc suy ra bất biến của các đa tạp, và nhận ra rằng một số ý tưởng của Wirtinger cho phép ta tính toán các nhóm cơ bản của

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

Mặc dù topo học thế kỉ 20 bắt đầu từ Poincaré, và mặc dù chính ông là người báo hiệu tầm quan trọng của nó, nhưng đó chỉ là một phần nhỏ trong toàn bộ các công trình của ông. Poincaré còn góp công vào một số thành tựu khoa học to lớn khác của thời đó, và bài phân tích đánh giá về các công trình khoa học của chính ông viết vào năm 1901, chỉ dành ba trong số chín mươi chín trang cho topo học. Tương tự, topo học chiếm chưa đầy một trang trong số bảy mươi bốn trang ca tụng Poincaré viết bởi chủ nhiệm Khoa của ông, Gaston Darboux.[172] Chỉ hai

---

phần bù của nút thắt. Ông chỉ ra một số vấn đề trong định nghĩa của Poincaré về các bất biến đồng điều. Ông chỉ ra rằng các khái niệm tương đương của nút thắt cần sự chú ý để tránh các nút thắt "hoang dã". Các nút thắt "hoang dã", ví dụ, không cần phải giáp với một đĩa theo nghĩa thông thường của từ này. Tietze đầu tiên đặt câu hỏi về việc liệu phần bù của hai nút thắt có thể là đồng phôi mà không cần các nút thắt phải đồng hướng với nhau hoặc với hình ảnh phản chiếu của chúng (§15). Điểm này trở thành một bài toán nổi tiếng chỉ vừa mới được giải quyết gần đây. Ông hỏi liệu tất cả các đa tạp con của không gian Euclid ba chiều giáp với hình xuyến là các phần bù của nút thắt. Ông nhìn vào phần bù của tập hợp của hình ba lá trái và phải, chỉ ra rằng chưa ai chứng minh hình ba lá trái và phải không giống nhau. Tương tự với phương pháp của Riemann nghiên cứu bề mặt như là các bề mặt bao trùm mặt cầu hai chiều nhưng chẻ nhánh ra nhiều điểm hữu hạn, ông nghiên cứu đa tạp bậc ba bao phủ khối cầu bậc ba nhưng chẻ nhánh trên các mối nối. Ông đặt ra câu hỏi liệu tất cả các đa tạp bậc ba có thể được tạo ra như vậy hay không (§18).

[172] Có lẽ tác giả muốn nói đến việc Gaston Darboux là Tổng Thư ký của bộ môn toán học trong Viện Hàn lâm Khoa học mà Poincaré là thành viên.

trong số tám mươi lăm trang của Jacques Hadamard là nhắc về các công trình toán học liên quan đến topo học của Poincaré.[173] Và chỉ có chưa đầy mười trang trong số hơn năm trăm trang công trình của Poincaré là đề cập tới topo học.

Poincaré là một thanh viên của Phòng Kinh tuyến và dẫn dắt công cuộc tìm tòi của phòng để cung cấp thời gian một cách đồng bộ hóa cho thế giới. Ông giám sát bản báo cáo năm 1897 về việc áp dụng hệ thập phân trong biểu diễn thời gian, và là cầu nối giữa Viện Hàn lâm Khoa học và phái đoàn thực thi nhiệm vụ đo đạc kinh tuyến phức tạp ở Quito, Ecuador. Ông là một trong những người có tầm nhìn xa trông rộng đã quyết định sử dụng tháp Eiffel để phat di các tín hiệu về thơi gian đã được đồng bộ hóa, tiền thân của hệ thống GPS ngày nay, một cách sử dụng mang tınh đột phá chiếc cột sắt khổng lồ của Paris cho phép cài đặt giờ mang tính thống nhất và xác định kinh độ.

Một phần là kết quả của công việc này, phần khác là kết quả của mối quan tâm của ông đến vật lí toán học và cơ học thiên thể, mà Poincaré đã tư duy một cách sâu sắc về bản chất của thời gian. Năm 1898, ông viết một bài báo

---

[173] J. Hadamard, "L'oeuvre mathématique de Poincaré", *Acta Mathematica* 38 (1921): 203-87. Đây là ban đánh giá lại các công trình của Poincaré, viết bởi nhà toán học người Pháp hàng đầu ngay sau thời Poincaré. Để xem thêm một bản tổng kết rất hay về topo học nửa đầu thế kỉ 20, tham khảo C. McA. Gordon, "3-Dimensional Topology up to 1960", 449-89 in *History of Topology*, ed. J. M. James (Amsterdam: Elsevier, 1999).

đặt câu hỏi liệu một giây của ngày hôm nay có bằng một giây của ngày mai hay không, và việc nói rằng hai sự kiện xảy ra cùng một lúc ở hai nơi khác nhau liệu có ý nghĩa gì hay không. Ông tham gia tích cực vào việc triển khai các hệ quả của các thí nghiệm, mà chúng dường như gợi ý rằng khoảng cách thu hẹp lại theo hướng chuyển động. Năm 1905, viên thư ký của một cơ quan cấp bằng sáng chế không tên tuổi thời đó, Albert Einstein, gây chấn động sân khấu khoa học bằng bốn bài báo lớn, mà ngày nay tất cả đều đã trở thành kinh điển. Cho đến năm 1909, Einstein được công nhận là một nhà tư tưởng lớn, ở cùng đẳng cấp với Poincaré. Mối quan hệ giữa hai người đàn ông này rất phức tạp: họ gặp nhau chỉ một lần, trong một hội nghị năm 1911 tại SG: Solvay, Bỉ. Poincaré đánh giá cao Einstein; Einstein nhìn nhận Poincaré như một trong những người gác đền lạc hậu vẫn còn bám vào những khái niệm vô ích như là ê-te.[174]

Một số người công nhận Poincaré là người khám phá một cách độc lập thuyết tương đối hẹp, trích dẫn bài báo tuyệt vời của ông về động lực của electron.[175] Mối quan hệ qua lại giữa các giả định triết học của thời đại, các ngành khoa học cơ bản (đặc biệt là vật lí), và nhu cầu về

---

[174] Xem thông tin về mối quan hệ giữa hai người trong P. Galison, *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps: Empires of Time* (New York: W. W Norton, 2003).

[175] H. Poincaré, "La mesure du Temps", *Revue de metaphysique et de morale* 6 (1898): 371-84; "Sur la dynamique de l'électron", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 21 (1906): 129-75 (thông báo trong *Comptes rendus de l'Academie des sciences* 140 (1905): 1504-08).

công nghệ của thời đại (nước Pháp phải quản lí một hệ thống các thuộc địa ở hải ngoại; Thụy Sĩ phải phối kết hợp một thời gian biểu phức tạp của hệ thống đường sắt), là những nền tảng cho các mặt tính cách của cả Poincaré lẫn Einstein - tất cả được mô tả độc đáo trong một cuốn sách gần đây của nhà nghiên cứu lịch sử khoa học Peter Galison:

> 'Liệu Einstein thực sự khám phá ra thuyết tương đối? Hay Poincaré đã tìm ra nó? Những câu hỏi cũ kĩ này đã trở nên tẻ nhạt và không có nhiều lợi ích... Ở đây ta có hai xu hướng cách tân vĩ đại của vật lí, hai khát vọng mãnh liệt trong việc nắm bắt toàn bộ thế giới ... Một [của Poincaré] theo phương pháp kiến thiết, xây dựng một hệ thống phức tạp có thể nắm bắt các mối tương quan về mặt cấu trúc của thế giới. Một [của Einstein] thiết yếu hơn, ít để ý hơn đến sự phức tạp để nắm bắt, một cách nghiêm ngặt, những nguyên tắc phản ánh các trật tự tự nhiên đang chi phối thế giới.... Phòng Kinh tuyến mà Poincare giám sát có vị thế của một trung tâm về thời gian vĩ đại của thế giới trong việc xây dựng bản đồ. Trong khi đó, Phòng cấp bằng sáng chế Thụy Sĩ, nơi Einstein giữ vị trí người bảo vệ cho bản quyền sáng tạo, là một trung tâm kiểm duyệt lớn của đất nước giúp các ngành công nghệ của đất nước cùng tạo nên sự đồng bộ về thời gian của ngành đường sắt và các thành phố.[176]

Giống như topo học, thuyết tương đối đã tạo ra những sự đột phá vĩ đại trong hiểu biết khoa học thời đó. Nguyên

---

[176] P. Galison, *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps. Empires of Time* (New York: W. W. Norton, 2003).

tắc chìa khóa theo đó các quy luật vật lí phải được nhận thấy là giống nhau đối với những người quan sát đang di chuyển với vận tốc không đổi so với nhau đem lại những hệ quả khổng lồ, vài trong số đó là việc phát hiện ra vật chất và năng lượng là hai biểu hiện của cùng một hiện tượng, là thời gian cùng không gian co quan hệ qua lại và dãn nở ở vận tốc cao. Poincaré có lẽ là người đầu tiên đặt không gian và thời gian cung với nhau như là một đối tượng toán học mà sau nay được gọi là *không-thời gian*. Hermann Minkowski, của Göttingen, đã chỉ ra rằng các công trình của Lorentz, Poincaré, và Einstein được hiểu một cách rõ nhất dựa theo ngôn ngữ của một dạng hình học Phi-Euclid mới thiết lập trên không-thời gian. Einstein lúc đầu hoài nghi. Tuy nhiên, đến năm 1912, ông bắt đầu tiếp thu nhiều hơn khi tìm cách khái quát hóa thuyết tương đối, cụ thể là trường hợp mà người quan sát chuyển động với bất kì cách thưc nào, đặc biệt là khi anh ta đang tăng tốc so với người khác. Cuối cùng, ông khám phá ra rằng, có một cách thiết lập các quy luật tổng quát của vật lí, đó là dựa vào hình học Riemann trên không-thời gian.

NƯỚC ĐỨC VÀ GÖTTINGEN

Sau đợt suy sụp năm 1882, phần nào là kết quả của việc lao động quá sức khi cạnh tranh với Poincaré, Felix Klein bắt tay vào xây dựng Leipzig thành một trung tâm nghiên cứu lớn, ngay cả trong lúc đang bị căn bệnh trầm

cảm tác động. Danh tiếng của ông tiếp tục lên cao trên toàn thế giới. Sự kiện Đại học Johns Hopkins, học viện nghiên cứu sau đại học đầu tiên ở Mĩ mời ông giữ chiếc ghế điều hành về toán học vừa mới bỏ trống, đã vực lại tinh thần của ông. Ông gần như chắc chắn sẽ đến đó nếu ông hiệu trưởng trường này đáp ứng mức lương 6.000 đô cho ông như vị giáo sư tiền nhiệm được trả. Thay vào đó, ông hiệu trưởng khăng khăng chỉ trả 5.000 đô, và Klein đã từ chối. Mặc dù là vô ích nhưng sẽ khá thú vị khi ta thử hình dung ngành toán học ở Mĩ sẽ phát triển như thế nào nếu như Klein chuyển đến Johns Hopkins. Hiếm khi nền giáo dục của cả một thế hệ lại bị mất cơ hội chỉ vì 1.000 đô như vậy.

Trong thời gian trả lời John Hopkins, Klein nhận được lời mời hấp dẫn cho một vị trí tại Göttingen năm 1886, thời điểm mà số sinh viên đăng kí tuyển sinh vào ngành toán của cả nước Đức bắt đầu giảm dần. Ông là thầy giáo tài năng, đầy nhiệt huyết, và đòi hỏi cao và có một sức hấp dẫn gần như Faust.[177] Các buổi thảo luận cao cấp của ông có một sự tuyển lựa ngặt nghèo các sinh viên tham gia. Ông không vui vẻ nhận những sinh viên tối dạ, và chỉ những ai có khả năng nhất và những ai luôn sẵn sàng làm việc chăm chỉ mới được nhận vào. Bài giảng của ông luôn được chuẩn bị kĩ lưỡng, còn bản thân ông là một thiên tài trong việc dẫn dắt câu chuyện. Ông kiểm tra một

---

[177] Faust: tên của nhân vật chính trong một câu chuyện huyền thoại của Đức. Tính từ "Faust" thường được dùng để miêu tả khát vọng hiểu biết.

điều gì đó bằng cách kể một ví dụ, triển khai vừa đủ chi tiết để diễn tả dòng lập luận chính. Sau đó, ông sử dụng ví dụ đó như một cách để khảo sát toàn bộ nội dung. Ông yêu thích các chủ đề rộng và nhấn mạnh các khái niệm khác nhau liên quan đến nhau một cách tinh tế như thế nào. Các kĩ năng tính toán chỉ làm ông chán nản. Sinh viên của ông cũng chép lại cẩn thận từng bài giảng, thêm vào các chi tiết (một số chi tiết cực kì khó chịu và thường chứa các bài toán lớn không dễ giải quyết chút nào).

Tầm nhìn học thuật rộng rãi của Klein khác hẳn với sự tập trung vào các nghiên cứu cực kì hẹp của vài đồng nghiệp đã thu hút nhiều sinh viên nước ngoài, đặc biệt là từ Mĩ. Ông đóng vai trò quyết định trong việc thành lập cộng đồng toán học Mĩ bằng cách đào tạo các nhà toán học, những người đặt nền móng cho các viện nghiên cứu chủ đạo trong những năm sau này.[178] Ông cũng rất khuyến khích phụ nữ nghiên cứu toán học và hướng dẫn một vai nghiên cứu sinh nữ.

Bên cạnh việc là một thầy giáo (và nhà nghiên cứu) tài năng, ảnh hưởng lớn nhất của Klein có lẽ là trong vai trò một nhà quản lí. Ông rất tinh tường trong việc nhận

[178] Hai sinh viên Mĩ của Klein là Cole và Fine khi còn học ở Đại học Leipzig lần lượt trở thành Trưởng khoa tại Đại học Michigan và Princeton. Từ Göttingen, Haskell đến thẳng Đại học Michigan, và sau đó là Berkeley. Osgood và Bocher là sức mạnh của khoa Toán Đại học Harvard. Hai trong số các sinh viên người Đức của Klein là Oskar Bolza và Heinrich Maschke từ Leipzig, di cư sang Mĩ và trở thành chỗ dựa chính của khoa Toán Đại học Chicago. Van Vleck, cũng là sinh viên của Klein tại Göttingen, là nhân vật hàng đầu trong việc thành lập khoa Toán Đại học Wisconsin.

biết tài năng toán học và không ngần ngại cất nhắc nhiều người tài năng hơn mình. Vị trí giảng dạy và biên tập của tạp chí có ảnh hưởng *Mathematische Annalen* đã đem lại cho ông mối quan hệ với các nhà toán học trẻ và tài năng nhất thời đó. Ông hào phóng về mặt trí tuệ, giữ liên lạc, quan tâm đến các công trình của những người trẻ tuổi, và giúp họ nắm giữ các vị trí. Cùng với sự thiết lập một hệ thống hoạt động như một trang trại, sự sẵn sàng chấp nhận rủi ro, khả năng vận động và tình bạn của ông với Althoff, Bộ trưởng Bộ Giáo dục bậc cao của Phổ, đã cho phép ông tuyển chọn được rất nhiều người tài.

Tại Gottingen, biệt tài của Klein trong việc tạo ra cộng đồng học thuật đã tạo dựng một Camelot toán học.[179] Bước ngoặt là việc tuyển David Hilbert, cựu học sinh tài năng của ông ở Leipzig. Klein vẫn giữ liên lạc với Hilbert sau khi chuyển đến Gottingen, và khuyến khích Hilbert đến thăm Paris, nơi Hilbert đã gặp nhiều nhà toán học người Pháp, trong đó có Poincaré. Khi trở về Đức, Hilbert bắt đầu quan tâm đến một trong những bài toán quan trọng nhất thời đó, *Bài toan Gordan*, bài toán đúc kết những kinh nghiệm mà nhờ đó chúng ta nhận ra các đối tượng như người, cây cối, và nơi chốn ngay cả sau những thay đổi do thời gian và góc nhìn. Theo ngôn ngữ toán học, ta nghĩ đến một nhóm các phép biến đổi tác động lên một tập hợp các đối tượng toán học, thường được mô tả bởi các phương trình, sau đó đặt câu hỏi liệu có một số

---

[179] Camelot: lâu đài của vua Arthur (nước Anh). Ngày nay, từ này được dùng để chỉ một nơi tụ họp của những người yêu chủ nghĩa lãng mạn và lạc quan (ND).

đối tượng hoặc các đại lượng, thường được mô tả bởi các biểu thức đại số, là bất biến dưới tác động của một nhóm các phép biến đổi. Bởi vì có quá nhiều tập hợp các phương trình mà ta có thể gặt hái thành công nếu tập trung vào chúng, và quá nhiều nhóm các phép biến đổi quan trọng về mặt hình học và dễ tiếp cận nhờ tính toán, nên việc tính toán các bất biến cho các tập hợp phương trình cho trước và một nhóm cụ thể là một lĩnh vực ít quan trọng, cung cấp hàng trăm bài toán tinh tế nhưng tương đối dễ tiếp cận cho các nhà toán học và sinh viên của họ.

Nghiên cứu về các bất biến rất phổ biến tại Anh cũng như Đức thời đó, còn những sinh viên nước Mĩ đầu tiên tốt nghiệp tại trường Johns Hopkins, dưới ảnh hưởng của người Anh di cư J. J. Sylvester, đã tính toán được bất biến cho một số lượng lớn đối tượng toán học. Người được thừa nhận là vua của toàn bộ lĩnh vực này là Paul Gordan, một người bạn của Klein và là giáo sư tại Đại học Erlangen. Ông thu được kết quả tổng quát tốt nhất về các bất biến. Thành quả của những nỗ lực này là việc tìm ra cấu trúc tổng quát của các bất biến như vậy cho một tập hợp khá lớn các phương trình và một số nhóm.[180] *Bài toán Gordan* đặt câu hỏi, đối với một

---

[180] Mỗi khi bạn có một biểu thức bất biến dưới các phép biến đổi thì bất kì phép nhân nào của biểu thức này cũng bất biến. Vì vậy, luôn có vô số các bất biến cho một tập hợp phương trình nhất định và một nhóm các phép biến đổi nhất định. Hơn thế nữa, tổng và tích của hai bất biến cũng là bất biến. Do đó, tập hợp các bất biến khép kín khi được nhân với số thực và bạn có thể cộng hoặc nhân các phần tử của nó. Đây là một cấu trúc mà các nhà toán học gọi là *đại số* (algebra)

tập hợp bất kì các phương trình và một nhóm bất kì nào, liệu có thể tìm ra được một tập hợp hữu hạn các biểu thức của một số bất biến mà dựa vào đó có thể suy ra tất cả các bất biến khác. Bằng các tính toán có sức mạnh tuyệt vời, Gordan chỉ ra rằng điều này thực sự đúng cho tất cả các phương trình hai biến và một lớp rộng lớn các nhóm. Đây được coi là một thành tựu tuyệt vời.

Nếu câu trả lời cho *Bài toán Gordan* là đúng, thì tất cả mọi người đều mặc nhiên thừa nhận rằng đáp án này liên quan đến việc triển khai một cách tường minh các bất biến cho các tập hợp biểu diễn của các phương trình và các nhóm, chỉ ra một cách nhất quán rằng danh sách các bất biến đã được hoàn tất cho từng trường hợp, và tìm cách chỉ ra rằng kết quả này áp dụng cho tập hợp biểu diễn sẽ dẫn đến kết quả cho mọi nhóm và mọi tập hợp phương trình.

Đây là một nhiệm vụ khổng lồ, và công việc có thể kéo dài hàng thế hệ. Trong một bài báo bốn trang được xuất bản sau một năm vật lộn với bài toán này, Hilbert đã giải quyết nó một cách hoàn toàn bằng cách chỉ ra rằng, giả thuyết không tồn tại một cơ sở hữu hạn nào như vậy sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, để cho hợp lí thì một cơ sở hữu hạn như vậy nhất thiết phải tồn tại. Phản ứng đầu tiên là sự giật mình hoài nghi. "*Unheimlich*" (Thật lạ lùng), Lindemann, một trong những đồng nghiệp lớn tuổi hơn của Hilbert đã khẽ thốt lên. "*Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie*" (Đây không phải là

toán học mà là thần học) Gordan phát biểu. [181] Klein thì như bị mê hoặc.

Bất chấp tính xác đáng đanh thép không thể phủ nhận trong lập luận của mình, Hilbert là một nhà toán học giỏi đến mức không cần quan tâm đến việc triển khai các tập hợp bất biến đó như thế nào, và ông đã đạt được tiến bộ đáng kể, một lần nữa sử dụng những phương pháp dường như hoàn toàn xa lạ đối với những nhà nghiên cứu trong lĩnh vực này.[182] Ông viết lại tất cả mọi thứ, và theo lời mời của Klein, gửi chúng đến tạp chí *Mathematische Annalen*. Gordan, chuyên gia được chỉ định để thẩm định bài báo, than phiền rằng chuẩn mực chân lí của Hilbert không nằm ở việc ông đã chỉ ra một cái gì đó vượt lên trên mọi ngờ vực khả dĩ, mà đúng hơn được thể hiện ở chỗ chẳng ai có thể chứng minh được rằng ông mâu thuẫn. Khi đọc bản nhận xét này của Gordan, Hilbert viết cho Klein thông báo rằng ông không chuẩn bị để thay đổi bất cứ điều gì, và đây là lời cuối cùng của ông về chủ đề này trừ phi ai đó có thể chỉ ra được rằng lập luận của ông là sai lầm. Sự quyết tâm và quyết đoán của tuổi trẻ hẳn đã gợi nhắc Klein về xung đột của ông với Poincaré. Hilbert đã đúng, nhưng lúc này đã bị dồn về

[181] Câu chuyện này phổ biến trong giới toán học. Xem thêm thông tin về Hilbert và phát kiến của ông trong Constance Reid, *Hilbert* (New York: Springer-Verlag, 1970).

[182] Hilbert nghiên cứu tập hợp quan hệ của các bất biến, là một cấu trúc đại số khác với bản thân bất biến (chúng có cấu trúc của một mô-đun đa thức thay vì cấu trúc của một đại số). Sau đó ông nghiên cứu quan hệ trong quan hệ, và tập hợp quan hệ trong tập hợp quan hệ trong tập hợp quan hệ v.v. Ông chỉ ra rằng quá trình này có điểm dừng, và kết quả này được gọi là *định lí Hilbert Syzygy*.

phía chân tường, và ông đồng thời cũng kéo theo Klein vào một tình thế không có nhiều lựa chọn. Klein đứng về phía Hilbert, nhận thấy rằng tư tưởng của ông "hoàn toàn đơn giản, và do đó hấp dẫn về mặt logic." Ông cũng quyết định đưa Hilbert về với Göttingen.

Năm 1895, cuối cùng Klein đã thành công trong việc tuyển dụng Hilbert, và Göttingen trở thành trung tâm toán học mạnh nhất nước Đức. Sinh viên nhanh chóng phát hiện ra Hilbert. Ông quan tâm nhiều về chi tiết và thỉnh thoảng cũng gặp vướng mắc, nhưng việc quan sát ông vượt qua những vướng mắc theo cách của riêng mình cũng đem lại rất nhiều bài học bổ ích. Bài giảng của ông tao nhã, nhưng không được trau chuốt kĩ như của Klein. Klein chú tâm vào phạm vi rộng, Hilbert thì ngược lại chỉ tập trung vào các khía cạnh hẹp. Ông là một người theo chủ nghĩa tối thiểu và luôn tìm con đường ngắn nhất hướng thẳng vào chủ đề. Ai cũng có thể học hỏi từ những bài giảng của Hilbert.

Với việc tuyển dụng Hilbert, Gottingen có được một nhà toán học và một nhân cách đủ tầm để vượt qua Klein. Trong khi Klein thích các tuyên bố có tính long trọng và vui vẻ tham gia vào các vụ vận động chính trị và bình luận những hệ quả sau đó, Hilbert không tin tưởng vào các tuyên bố có tính khái quát và cực kì thẳng thắn. Klein là một nhà tổ chức tầm cỡ, còn Hilbert là một bậc kì tài và không bao giờ ưa sự bừa bãi trong toán học. Cả hai đã cùng kết hợp thật tuyệt vời.

Các nhà toán học ùn ùn kéo đến Göttingen, các sự bổ nhiệm ấn tượng nối tiếp nhau. Đại học Berlin, trên danh

nghĩa là đại học uy tín nhất nước Đức, đã cố gắng kéo Hilbert về với họ. Nhưng ông đã ở lại.

Mối quan tâm trong nghiên cứu của Hilbert thay đổi theo từng năm. Nhìn chung, ông chuyển hoàn toàn sang một lĩnh vực mới cứ sau khoảng một thập kỉ, và tạo nên các bước tiến mang tính cơ bản trong từng lĩnh vực mà ông làm việc. Ông bắt đầu với lí thuyết bất biến, chuyển qua lí thuyết số đại số, và gần thời điểm chuyển giao của thế kỉ trước, ông rất quan tâm đến các nền tảng của hình học. Hilbert viết lại toàn bộ cuốn sách *Cơ sở* của Euclid, đặt tất cả sự cải tiến lên trên một nền móng cực kì chặt chẽ. Ông tiến đến việc phát triển các tiên đề một cách rõ



Hình 49. Chân dung David Hilbert.

ràng, trong sáng để chúng tuyệt đối không còn bất cứ sự mơ hồ nào. Ông lập luận rằng các tiên đề phải cực kì hoàn hảo đến mức mà nếu ta thay thế ở mọi trang sách các thuật ngữ của Euclid như "điểm", "đường ", và "mặt phẳng" bằng "chai bia", "chân bàn" và "ghế" thì toàn bộ lí thuyết vẫn được thông qua. Ta không thể dựa vào trực giác để lấp các khoảng trống.

Sách ngắn của Hilbert về các nền tảng hình học đã trở thành một cuốn sách bán rất chạy.[8] Nó đem lại sự tươi mới cho một chủ đề rất cũ, và ông tiến rất xa, xa hơn cả Euclid. Ông không chỉ đưa ra các tiên đề mới để nắm bắt những khái niệm như *đứng giữa* hay *thứ tự*, những khái niệm mà tính chất của chúng được Euclid mặc nhiên viện dẫn, mà còn đa dạng hóa các tiên đề để thu được các dạng hình học khác nhau.

Poincaré rất vui mừng, cẩn thận viết một bài phê bình cho thấy rằng ông rõ ràng đã đọc nội dung của cuốn sách một cách kĩ lưỡng và suy nghĩ rất chín chắn về những ẩn ý bên trong. Ông lo lắng một chút về đam mê logic của Hilbert có thể sẽ có hại tới hình học: "Dường như duy chỉ quan điểm logic là làm anh ấy quan tâm." Ông kết luận: "Công trình của anh vì vậy sẽ chưa hoàn thiện, nhưng đây không phải là lời một chỉ trích mà tôi dùng để chống lại anh ấy. Công trình chưa hoàn thiện chắc chắn sẽ có vai trò của nó. Đủ để nói rằng anh ấy đã đưa triết học của toán học tiến một bước dài, sánh ngang

[8] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie* (Leipzig: Teubner, 1899) Bản dịch tiếng Anh của E. J. Townsend (n.p.: 1902). Các ấn bản sau đó vẫn liên tục được xuất bản kể từ năm 1902.

với những người như Lobachevsky, Riemann, Helmholtz, và Lie."[184] Poincaré tuyệt nhiên không phóng đại trong lời ca ngợi của mình. Đó là sự thật hiển nhiên.

Hilbert có khả năng chứng minh rằng hình học Euclid là nhất quán với điều kiện là số học phải nhất quán. Hilbert, cũng như Klein, quan tâm đến hầu hết các lĩnh vực toán học. Ông chuyển sang logic toán học, đem lại những đóng góp cơ bản mà sau này là khởi đầu của một số thành tựu vĩ đại nhất của thế kỉ 20, nhưng điều đó nằm ngoài phạm vi cuốn sách này. Năm 1900, ông đọc một bài diễn văn tại Hội nghị Quốc tế ở Paris liệt kê 23 bài toán mà ông nghĩ là chúng sẽ đem lại một lịch trình làm việc cho các nhà toán học trong thế kỉ sau. Danh sách này có ảnh hưởng cực kì lớn. Trong những năm tiếp theo, Hilbert càng quan tâm đến vật lí toán học hơn, và Gottingen trở thành địa điểm rất quan trọng trong quá trình phát triển các lí thuyết mới về tính tương đối và cơ học lượng tử. Đến năm 1910, Göttingen tập trung hàng trăm sinh viên toán trên toàn thế giới, và rất nhiều giảng viên trợ lí (privatdozents) và giảng viên chính thức có tên tuổi của vật lí toán học.[185] Phụ nữ, người Do Thái, mọi

---

[184] H. Poincaré, phê bình cuốn sách "Foundations of Geometry", của Hilbert, *Bulletin of the American Mathematical Society* 10 (1903): 1-23. In lại trong D. Saari, ed., *The Way It Was: Mathematics from the Early Years of the Bulletin* (Providence: American Mathematical Society, 2003, 273-96)

[185] Danh sách *ai là ai* (who's who list): Danh sách tuyển chọn những người có ảnh hưởng trong một ngành theo một tiêu chí nhất định của Mĩ (ND).

quốc tịch, tất cả đều được chào đón.[186] Hilbert thậm chí còn mời Poincaré đến giảng năm bài tại Göttingen, trong đó có bốn bài giảng bằng tiếng Đức.

POINCARÉ QUA ĐỜI

Poincaré ngã bệnh nặng tại Đại hội Toán học Quốc tế ở Rome tháng 4 năm 1908. Phần lớn thời gian ông ở trên giường do bệnh tuyến tiền liệt thêm nặng, không thể diễn thuyết được mà phải nhờ Darboux đọc thay. Ông yêu cầu được phẫu thuật và vợ ông, Louise, đi tới Rome để đưa ông về Paris. Mặc dù tình trạng của ông có tiến triển phần nào và có ông thể trở lại làm việc, nhưng ông vẫn chưa thực sự bình phục.

Ông dường như đã đoán trước được cái chết của mình. Tháng 12 năm 1911, ông gửi một bức thư đến người phụ trách biên tập của tạp chí đã xuất bản bài báo bổ sung thứ năm của ông và bài báo về chuyển động của một electron.

> "Bạn thân mến của tôi, tôi đã nói với bạn lần cuối khi gặp bạn về một bài báo mà tôi đang tập trung vào đã hai năm nay. Tôi không có chút tiến bộ nào cả về chủ đề này và quyết định để nó tạm lắng một thời gian chờ cơ hội chín muồi. Sẽ tốt nếu như tôi có thể chắc chắn về khả năng quay lại vấn đề này một ngày nào đó. Nhưng ở tuổi của tôi, điều này là không thể."

---

[186] Đầu năm 1914, Göttingen có trên 800 sinh viên toán, hơn một trăm ở cấp cao. Xem thêm chi tiết trong cuốn sách của C. Reid và bài báo của Rowe

Biên tập viên thúc giục ông xuất bản, thuyết phục rằng Poincaré có thể mở đầu bằng một lời giải thích. Bài báo được in vào năm 1912, va mở đầu bằng một lời xin lỗi của Poincaré. "Tôi chưa bao giờ công bố một công trình nào có tình trạng chưa hoàn tất như lần này."[187] Ông tiếp tuc với việc nói rằng một số vấn đề trong động học liên quan đến sự tồn tại của các nghiệm tuần hoàn của bài toán ba vật thể phụ thuộc vao một kết quả hình học đơn giản mà ông càng ngày càng tin chắc là đúng, nhưng chưa thể chứng minh được. Ông tiết lộ rằng ông không còn nhiều thời gian và hi vọng các nhà toán học khác có thể thành công hơn. Đoạn này, tình cờ, lại xác nhận sự cẩn thận của

---

[187] Bức thư của Poincaré gửi đến Giovanni Battista Guccia (9 tháng 12, 1911). Archives Circolo Matematico del Palermo [Mon cher ami, Je vous ai parlé, lors de votre dernière visite, d'un travail qui me retient depuis deux ans. Je ne suis pas plus avancé et je me decide à l'abandoner provisoirement pour lui donner le temps de mûrir. Cela serait bien si j'etais sur de pouvoir le reprendre; à mon âge je ne puis en répondre... Dites moi, je vous prie, ce que vous pensez de cette question et ce que vous me conseillez.]

Bức thu của Guccia gửi đến Poincaré (12 tháng 12, 1911). Collection particulère Paris, chụp hình lại trong trung tâm lưu trữ Poincaré trên mạng của Nancy. [Mon cher ami, Je vous confirme ma dépêche "Conseil publiez." Quoique inachevé, votre travail ouvrira certainement des voies nouvelles aux autres chercheurs, et la Science en profitera. Au surplus, si vous le croyez nécessaire, vous pourriez ajouter au commencement (sous forme de lettre ou dans une note), que c'est sur les instances prieés de la Directions des *Rendiconti* que vous vous étes decide à publier ces recherches inachevées.]. Bài báo "Sur un théorème de géometrie" in trong *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* 33 (1912) 375-407 và in lại trong toàn tập *Oeuvres, 6:499-538*

Poincaré đối với các công bố của mình. Ông có thể không dành nhiều thời gian để rà soát lại, nhưng ông tỏ ra thận trọng về kết quả của mình. Đây là bài báo hình học cuối cùng của Poincaré, và cũng là sự mở đầu của một ngành mới, ngành topo đối ngẫu, nghiên cứu các đa tạp bằng một cấu trúc bổ sung cho phép ta định nghĩa các diện tích của các bề mặt trên đa tạp (mà không cần đến chiều dài của đường cong).[188]

Ca phẫu thuật thứ hai vào tháng 7 năm 1912 dường như thành công mĩ mãn. Nhưng một cơn tắc mạch đã khiến ông không qua khỏi khi đang mặc quần áo ở Paris, ngày 17 tháng 7 năm 1912. Cái chết bất ngờ khi đang ở đỉnh cao sự nghiệp của ông đã gây sốc cho cả thế giới. Những người tưởng nhớ đổ về Paris. "Henri Poincaré thực sự là bộ não sống của các môn khoa học lí tính", một bài điếu văn trên báo *Le Temps* khóc thương.[189] Đám tang của ông ở Paris có mặt những nguyên thủ quốc gia và đại diện của tất cả các trường đại học lớn. Nhà toán học xuất chúng nhất nước Pháp khi đó, Jacques Hadamard, chỉ trẻ hơn Poincaré năm tuổi, soạn thảo một bản tổng kết các công trình của Poincaré. Göttingen cũng chuẩn bị một

---

[188] Hình học đối ngẫu là một loại hình học khác được xây dựng không phải bằng khoảng cách và góc (tức là métric) mà bằng diện tích. Còn topo đối ngẫu là ngành học nghiên cứu các đa tạp mang các cấu trúc đối ngẫu. Những ngành này đã trở nên cực kì quan trọng trong hai thập kỉ rưỡi vừa qua.

[189] P. Painlevé viết trong *Le Temps*: "Henri Poincaré etait vraiment le cerveau vivant des sciences rationelles." Câu này được trích dẫn rộng rãi.

bản đánh giá lại các công trình của ông. Gaston Darboux diễn thuyết một bài ca tụng dài ghi lại những đóng góp của Poincaré trong nhiều lĩnh vực.

Poincaré đã hoàn toàn đắm mình trong dòng thời gian của ông, và những công trình phục vụ khoa học và phục vụ nước Pháp tiêu biểu cho những gì đẹp nhất của thời đại. Sự ra đi sớm của ông dường như có nhiều ý nghĩa sâu sắc hơn những gì mà những người ca tụng ông vẫn còn nắm lờ mờ. Điều đã trở nên rõ ràng hơn một trăm năm sau đó là việc Poincaré đã gieo trồng những hạt giống cho những ngành toán học hoàn toàn mới. Và không chỉ có toán học. Bài diễn văn năm 1904 về tương lai của vật lí toán học có tính tiên tri lạ thường.[190] Không giống như Riemann, ông qua đời lúc đang nổi tiếng với sự ngưỡng mộ của nhiều người. Nhưng ông giống Riemann ở điểm ông không có sinh viên, không lập nên trường phái. Phần lớn các công trình toán học của Poincaré không được hiểu rõ tại thời điểm đó. Poincaré đã qua đời, nhưng ý tưởng và phỏng đoán của ông vẫn còn sống mãi. Mặc dù, các sự kiện trên sân khấu lớn hơn đã can thiệp làm chặn đứng sự tiếp nối tức thời các công trình của ông bởi các đồng nghiệp khác, nhưng những ý tưởng và các bài toán mà Poincaré vạch ra đã được nhận thức một cách đầy đủ hơn vài thập kỉ sau đó. Nếu Hilbert lập nên lịch trình, thì Poincaré đã tạo nên hình dạng của toán học thế kỉ 20.

---

[190] H. Poincaré, "The present and future of mathematical physics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12 (1906): 240-260; in lại trong số 37, no. 1 (1999):25-38.

12

Phỏng đoán kiên định

Những năm đầu của thế kỉ 20 dường như là điểm mở đầu một kỉ nguyên mới, ở đó sự quốc tế hóa và chia sẻ các giá trị nhằm đảm bảo một sự thịnh vượng ngày càng tăng, và một trật tự thế giới trong đó châu Âu có vị thế đứng đầu vững chắc. Các hội chợ thế giới, được tổ chức hơn một trăm lần trong ba thập kỉ bắt đầu từ năm 1880, để chào mừng tiến bộ trong học tập, văn hóa, và công nghệ.[191] Toán học, cũng như khoa học nói chung, được chuyên nghiệp hóa một cách triệt để và phản ánh sự phát triển của thời đại. Các trung tâm lớn vẫn là các trường đại học Đức và Paris, nhưng sự thành lập của những hội toán ở các quốc gia khác (Moscow vào năm 1864, London năm 1865, Pháp năm 1872, Tokyo năm 1877, Palermo năm 1884, New York năm 1888, Berlin 1890) phản ánh sự hiện diện của các ngành toán học được phát triển nghiêm túc ở những nơi khác. Poincaré và những công trình của ông

[191] Có tất cả 37 hội chợ trong thập kỉ 1880, 35 trong 1890, 31 từ năm 1900 đến 1910 (en.wikipedia.org/wiki/World's_Fair). Một trong những gian hàng trưng bày lớn nhất là của Krupps ở hội chợ thế giới Chicago

là minh chứng cho hướng đi mà theo đó xu hướng mạnh mẽ của sự quốc tế hóa cùng tồn tại vững chắc với lòng yêu nước kiên cường. Ông là người Pháp, nhưng tầm nhìn của ông lại mang tính quốc tế. Các bài toán mà ông tập trung giải quyết có cảm hứng từ - và đồng thời cũng đóng góp cho - một cộng toán học mà bản thân nó cũng mang tính quốc tế rất cao.

Palermo, nằm ở phía tây của bờ bắc Sicily, là một ví dụ điển hình của thời đại mới này. Ở đó có một tầng lớp trung lưu giàu có và một nền tảng văn hóa đang phát triển.[192] Nhiều ngôi đền Hi Lạp ở Sicily (nhiều hơn cả ở Hi Lạp) gợi nhắc đến cội nguồn văn hóa và trí tuệ gần như không thể bị phá vỡ và đến một quá khứ thiêng liêng. Hội toán học ở Palermo, kể từ khi thành lập năm 1884, đã phát triển thành một cộng đồng toán học lớn nhất thế giới. Tạp chí của hội, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, là tạp chí quốc tế được lưu hành rộng rãi nhất.[193]

[192] Tuy nhiên, đáng buồn thay, sự bùng nổ kinh tế ở Palermo không dựa vào nội lực mà chủ yếu nhờ quả bong bóng lạm phát tạm thời được tạo ra bởi xuất khẩu hàng hóa rẻ tiền của Sicily nhờ yếu tố nhân công rẻ. Mọi thứ vượt tầm kiểm soát, và xã hội dân sự thực sự bị phá vỡ. Chính quyền dân sự và chính phủ mặc dù trên danh nghĩa đang nắm quyền, đã phải kêu gọi Mafia dập tắt các cuộc nổi dậy của người lao động. Joseph Petrosino một cảnh sát cao cấp New York đã từng đến Sicily để truy tìm nguồn gốc của hoạt động bạo kê và tống tiền tại Mĩ, bị công khai bắn chết vào năm 1909 dưới bức tượng Garibaldi ở quảng trường Piazza Marina, trung tâm Palermo.

[193] A. Brigaglia: "The Circolo Matematico di Palermo", 179-200 trong K. H. Parshall, A. C. Rice, eds. *Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945* (Providence: American Mathematical Society and London: London Mathematical Society, 2002). Xem trang 192.

Các bài báo bổ sung đầu tiên và thứ năm, và đặc biệt là giả thuyết Poincaré, được in trong đó. Có vẻ khá hợp lí khi nói rằng không gian khối mười hai mặt của Poincaré theo cách gọi của chúng ta hôm nay được xuất hiện lần đầu trước công chúng gần nơi hình khối mười hai mặt được phát hiện hàng ngàn năm trước: Palermo chỉ cách Croton hai trăm dặm, nơi Pythagoras và nhóm của ông sinh sống.

Poincaré cũng là hình tượng đặc trưng cho các mối mâu thuẫn của thời đại đó. Là một người theo chủ nghĩa quốc tế, và tin tưởng một cách say mê vào các giá trị mang tính phổ quát, duy lí của trào lưu Khai sáng, ông đồng thời cũng tin chắc rằng Pháp và nền đệ tam cộng hòa của nước này nắm giữ một chìa khóa của các giá trị này. Được xem là biểu tượng của nước Pháp, ông không bao giờ vượt qua được cảm giác xấu hổ nảy sinh sau thảm họa quốc gia năm 1870.[194] Cuối cùng, sự phản động của chủ nghĩa quốc gia đã đàn áp làn gió mới của chủ nghĩa quốc tế thời đó. Chưa đầy hai năm sau cái chết của Poincaré, Gavrilo Princip, một thành viên của hội điệp viên Serbia, bắn chết Thái tử Franz Ferdinand

---

[194] Trong một bài diễn văn cho một nhóm sinh viên, Poincaré đã cảnh báo: "Các bạn có nghĩ rằng Wilhelm II sẽ có ước vọng giống như bạn không? Các bạn có tin tưởng anh ta sử dụng quyền lực của mình để bảo vệ lí tưởng của bạn không? Hoặc các bạn có đặt niềm tin vào mọi người, và hi vọng rằng lí tưởng họ sẽ gặp nhau? Đó là những gì ta hi vọng vào năm 1869. Đừng nghĩ rằng quyền lợi hay tự do mà người Đức gọi tên là cùng với một thứ mà chúng ta gọi." H. Poincaré, "Le Banquet du 11 Mai", tiệc thường niên của Tổng hội Sinh viên Paris, 1903, 63, trích dẫn trong Galison, 213.

của Áo vào ngày 28 tháng 6 năm 1914. Hiệp ước giúp đỡ lẫn nhau giữa các quốc gia lần lượt kéo hết nước này đến nước khác vào thảm kịch Đại chiến. Áo động binh chống lại Serbia. Nga động binh hỗ trợ Serbia đánh Áo. Đức lại giúp đỡ Áo chống Nga. Pháp đối nghịch với Đức ủng hộ cho nước đồng minh Nga. Đức tấn công Pháp trước, và vào cuối tháng 8, hơn một chục nước đã tuyên bố chiến tranh. Vào lúc đó, những cuộc xung đột xảy ra "không phải như trong một tấn thảm kịch tột cùng, mà như là một sự đứt quãng theo cách thức khó chịu nhất..."[195]

Cuộc đại chiến vượt xa giới hạn của một sự đứt quãng. Trong số nhiều thiệt hại mà nó gây ra, cuộc chiến làm chia rẽ giới toán học và phá vỡ các cảm tình đối với các hiệp định mang tính quốc tế. Tự hào và cạnh tranh quốc gia cô đọng thành thù hận. Klein đã kí vào một thông cáo chung được lập bởi các nhà khoa học và nghệ sĩ nổi tiếng của Đức, tuyên bố hỗ trợ cho hoàng đế và quả quyết rằng có một tập hợp các nhận định về nước Đức được kẻ thù dựng lên là sai. Ông lập tức bị trục xuất ra khỏi Viện Hàn lâm Paris, không bao giờ được tha thứ vì chữ ký của ông trong bản thông cáo đó. Các nhà toán học có ảnh hưởng nhất nước Pháp bắt đầu chống Đức một cách điên cuồng.

---

[195] Đây là lời mà Vera Brittain mở đầu cuốn sách của bà, *Testament of Youth: An Autobiographical Study of the Years 1900-1925* (New York: Penguin, 1989; xuất bản lần đầu tiên tại London, 1933). "When the Great War broke out, it came to me not as a superlative tragedy, but as an interruption of the most exasperating kind to my personal plans."

Cuộc chiến phá hủy trật tự cũ và làm suy yếu châu Âu trầm trọng. Toàn bộ thế hệ toán học đầy hứa hẹn của châu Âu đã biến mất trong cuộc chiến này. Tình trạng kinh tế phá hủy những gì còn lại mà bom đạn và khói lửa chưa kịp phá. Sự giàu nghèo ở Palermo ngày càng phân cách, và tạp chí *circolo matematico* rơi xuống vực thẳm. Siêu lạm phát ở Đức, phần nào là do việc bồi thường chiến tranh, làm xã hội dân sự suy yếu. Cách mạng Nga đem lại cơ hội cho các hướng đi chủ nghĩa xã hội, mà sau này đã gây ra chuỗi thảm kịch cho người dân Nga. Sự hỗn loạn của nền kinh tế và mong muốn thiết lập trật tự đã tạo điều kiện thuận lợi cho chủ nghĩa cực đoan, chủ nghĩa toàn trị và một cuộc chiến khác.

Khi nhìn lại, sự lạc quan của những năm đầu thế kỉ 20 dường như ngây thơ một cách không thể dung thứ, và chủ nghĩa quốc tế mong manh đến mức khó tưởng tượng. Năng lượng của thời đại dường như không giống với sự khỏe khoắn và tươi trẻ, mà như là sự cuồng loạn bất hạnh của các giai đoạn cuối cùng của sự tàn phá. Các hiện vật mang tính văn hóa ở các hội chợ thế giới ca tụng vinh quang của tinh thần nhân bản được đặt cạnh các vũ khí được trưng bày với số lượng khổng lồ.

THUYẾT TƯƠNG ĐỐI RỘNG

Không phải tất cả đã mất. Cuộc sống của tâm trí, tất nhiên, không bao giờ có thể ngưng lặng, cho dù những loạt đại bác có đinh tai nhức óc cỡ nào. Ngay trước chiến

tranh, Einstein từ bỏ vị trí giáo sư tại Zurich để nắm giữ một vị trí nghiên cứu thuần túy ở Berlin.[196] Trong nỗ lực tìm kiếm mở rộng thuyết tương đối cho các trường hợp mà ở đó hệ quy chiếu gia tốc so với một hệ khác ông cần một ngôn ngữ toán học thuận lợi cho vài tập hợp các phép biến đổi mang tính tổng quát. Với sự giúp đỡ của Marcel Grossman, một nhà toán học và là một người bạn mà ông làm việc cùng ở Zurich, ông nhận ra rằng công trình của Riemann phù hợp một cách hoàn hảo với các nguyên tắc vật lí mà ông đã phát hiện ra: Nó cho phép sự biến đổi độ cong và dạng hình học từ điểm này tới điểm khác, và hệ thống các công cụ tính toán được phát triển bởi nhà hình học người Ý Gregorio Ricci-Curbastro và sinh viên của ông Tullio Levi-Civita đã cho phép Einstein phát biểu lại các phương trình vi phân biểu diễn các quy luật vật lí cổ điển. Trong lí thuyết rộng của Einstein, các lực do gia tốc gây ra không khác so với các lực do lực hấp dẫn, do đó bằng nhau. Nếu tự ta xem mình như là đang gia tốc so với một điểm quy chiếu cố định nào đó, ta sẽ

[196] Einstein đã trình luận án sau tiến sĩ (*Habilitationschrift*) và có được vị trí giảng dạy đầu tiên tại Đại học Bern năm 1908. Đến năm 1909, ông đã được công nhận là một nhà tư tưởng lớn và đã có thể rời bỏ công việc tại Phòng cấp bằng sáng chế. Ông trở thành giáo sư Đại học Karl-Ferdinand ở Prague năm 1911, rồi trở về Thụy Sĩ năm 1912, nắm giữ một vị trí tại trường đại học nổi tiếng Eidgenössische Technische Hochschule ở Zurich. Công việc mà ông nhận ở Berlin rất thoải mái. Ông giữ vị trí tại Viện Hàn lâm Khoa học Phổ; có một vị trí nhưng không phải giảng dạy tại Đại học Berlin và được bổ nhiệm làm Giám đốc Viện Vật lí Kaiser Wilhelm vừa được thành lập.

diễn tả lực mà ta đang cảm thấy được như thể nó bắt nguồn từ gia tốc. Thay vì vậy, nếu ta xem mình như đang đứng yên so với một điểm cố định, ta sẽ diễn tả lực đó như lực hấp dẫn. Gia tốc luôn luôn mang tính tương đối so với cái gì khác, và các lực gây ra do gia tốc và do lực hấp dẫn là tương đương. Einstein diễn tả lực hấp dẫn như là độ cong của không-thời gian (và theo Riemann, độ cong là một tensor biểu diễn độ chênh lệch so với 180 độ của tổng các góc trong tam giác trắc địa theo bất kì sự định hướng khả dĩ nào đối với một quan sát viên). Phương trình của Einstein mô tả cách thức mà tensor độ cong biến đổi trong sự hiện diện của vật chất. Vật chất làm cong không-thời gian. Đến năm 1915, khi cả một thế hệ trẻ nằm chết trong chiến hào, ông đã có lí thuyết tổng quát sẽ định hình thế giới quan của các thế hệ kế tiếp. "Với niềm vui lớn", ông viết, "tôi đã hoàn toàn thành công trong việc thuyết phục Hilbert và Klein."[197]

Công trình của Einstein như một trận cuồng phong. Ông trở nên nổi tiếng trên toàn thế giới vào năm 1919 khi một đoàn thám hiểm khoa học Anh trong lúc quan sát nhật thực đã đo được "độ cong" của ánh sáng khi đi ngang qua mặt trời một cách chính xác theo phương trình

---

[197] Trích dẫn từ trang web của St Andrews. Einstein trình bày hai bài, "Về lí thuyết tương đối tổng quát" ở Viện Hàn lâm Berlin vào ngày 11 và 25 tháng 11; và Hilbert trình bày một bài "Về nền tảng Vật lí" ở Viện Hàn lâm Göttingen vào ngày 20 tháng 11 năm 1915. Bài báo của Hilbert là bài đầu tiên chứa phương trình trường chính xác của thuyết tương đối. Cuộc gặp gỡ giữa hai người diễn ra thân thiện, và Hilbert thẳng thắn thừa nhận rằng ý tưởng là của Einstein. Nhưng suy luận của Hilbert dễ hiểu hơn.

của ông. Ánh sáng, tất nhiên, không bị bẻ cong - ánh sáng đi theo một đường trắc địa trong không-thời gian. Điều đã xảy ra là mặt trời khổng lồ đã uốn cong không-thời gian xung quanh nó, và kết quả là quỹ đạo mà ánh sáng vẽ ra trông giống như bị bẻ cong.

Công trình của Einstein kích thích hết sức mạnh mẽ sự phát triển của hình học Riemann. Vào lúc đó, nó không trực tiếp ảnh hưởng đến sự phát triển của topo học. Einstein chắc chắn nhận thức được sự tồn tại của các đa tạp ba chiều khác nhau, và khả năng theo đó không gian và không-thời gian có thể có các topo khác nhau. Nhưng tất cả các phương trình của thuyết tương đối rộng đều là các phương trình vi phân và được áp dụng ở các khu vực nhỏ trong không-thời gian. Topo học được áp dụng trong cấu trúc có quy mô lớn của không gian (và của không-thời gian). Không ai có thể mơ tưởng về khả năng của một sự kết nối giữa giả thuyết Poincaré và thuyết tương đối rộng

GIẢ THUYẾT POINCARÉ GIỮA CÁC CUỘC CHIẾN

Sau các công trình của Dehn và Tietze, đã không còn nghi ngờ gì về việc giả thuyết Poincaré là rất khó giải quyết, và công trình về topo học của Poincaré là một nguồn quan trọng dẫn đến các bài toán thú vị. Dehn cùng với Tietze đã đưa ra một khởi điểm khả dĩ mà từ đó các nhà topo học có thể bắt đầu tiếp cận với các công trình của Poincaré nói chung và giả thuyết của ông nói riêng.

Các bước tiến quan trọng nhất đến từ một người Mĩ, James W. Alexander (1888-1971), người đã tới Châu Âu để thực hiện nghiên cứu sau khi đã nhận bằng tiến sĩ từ Princeton. Alexander đã sống ở Paris trong chiến tranh, dịch luận án của Heegaard sang tiếng Pháp.[108] Ông gia nhập quân đội Mĩ năm 1917, lên đến cấp đại úy, rồi giải ngũ năm 1920 để trở thành giảng viên Đại học Princeton. Năm 1919, Alexander đã chỉ ra rằng có hai đa tạp bậc ba đã được Tietze tìm ra trước đó, có cùng một nhóm cơ bản và có cùng các nhóm đồng điều nhưng lại không đồng phôi.[109] Vì vậy, câu trả lời cho câu hỏi liệu hai đa tạp bậc

---

[108] Luận văn của Heegaard: P. Heegaard, "Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske fladers sammenhæng" (København, *Det Nordiske Forlag*, 1898). Bản dịch sang tiếng Pháp của Alexander được in như sau: "Sur l'Analysis situs", *Bulletin de la Société Mathématique de France* 44 (1916): 161-242. Xem tiểu sử của Alexander trong S. Lefschetz, "James Waddell Alexander (1888-1971)", *Yearbook of the American Philosophical Society* (1973) (Philadelphia: American Philosophical Society 1974),110-14.

[109] J. W. Alexander, "Note on Two 3-Dimensional Manifolds with the Same Group", *Transactions of the American Mathematical Society* 20 (1919): 339-42. Nhớ lại rằng Tietze đã chỉ ra hai đa tạp bậc ba có cùng các nhóm cơ bản nhất thiết phải có cùng một nhóm đồng điều (điều này hoàn toàn sai nếu đa tạp có hơn ba chiều). Hai đa tạp có cùng các nhóm cơ bản ngày nay được biết đến như là không gian thấu kính (lens spaces) L (5,2) và L (5,1). Cho bất kì số nguyên dương *p* và bất kì *q* nào nhỏ hơn *p* nhưng lớn hơn hoặc bằng 0 và không có ước số chung với *p*, bạn định nghĩa một không gian thấu kính L (*p*, *q*) như sau: Chia đường xích đạo của quả cầu ba chiều thành *p* đoạn bằng nhau, và tưởng tượng bán cầu trên và bán cầu dưới là các đa giác đều *p* mặt. Nối các đa giác này bằng cách quay nửa trên *q/p* vòng ngược chiều kim đồng hồ. Tietze nhận thấy rằng *L (p, q)* được bao phủ bởi khối cầu ba chiều *p* lần, do đó có nhóm cơ

ba thuộc cùng nhóm cơ bản có nhất thiết phải đồng phôi hay không là phủ định. Giả thuyết Poincaré là trường hợp đặc biệt của câu hỏi này: khi các nhóm cơ bản chỉ có một phần tử duy nhất. Kết quả của Alexander làm tăng rất cao tỉ lệ đặt cược vào giả thuyết Poincaré, và làm dấy lên một khả năng rõ rệt là phỏng đoán sai.

Alexander tiếp tục đưa ra rất nhiều các phát kiến quan trọng khác.[200] Tại Đại hội Toán học Quốc tế năm

---

bản hữu hạn với p thành phần (Mũ p của ít nhất một trong số đó là đơn vị). Ông đặt câu hỏi cụ thể liệu L (5,1) và L (5,2), là những ví dụ đơn giản nhất không phải rõ ràng là đồng phôi, trong thực tế có phải là đồng phôi. Alexander dường như không biết được Tietze đã dứt khoát đặt câu hỏi này. Thuật ngữ "không gian thấu kính" xuất phát từ bài báo này. W. Threlfall và H. Seifert, "Topologische Untersuchung der Discontinuitatsbereiche endlicher Bewegungsgruppen der dreidimensionalen spharische Raumes I", *Mathematische Annalen* 104 (1930):1-70. Bài báo khảo sát toàn bộ các không gian đó. Sau khi chia đường xích đạo của quả cầu ba chiều thành p phần, các tác giả hình dung bán cầu trên và dưới giống như các hình lăng trụ p mặt, vì vậy quả cầu ba chiều trông giống như viên ngọc $2p$ cạnh.

[200] Ông làm rõ mối quan hệ giữa topo tổ hợp, trong đó các đa tạp bậc ba được coi như là các hình khối đa diện xác định, và topo nói chung, trong đó một đa tạp bậc ba không nhất thiết có thể được cắt ra thành một số hữu hạn các mảng với hữu hạn mặt. Ông phát hiện ra, ví dụ như, "hình cầu sừng" Alexander nổi tiếng, đồng phôi với một mặt cầu hai chiều và nằm trong khối cầu ba chiều, nhưng không chia khối cầu ba chiều thành hai khu vực mà bao đóng đồng phôi với quả cầu ba chiều. Mặt khác, ông chỉ ra rằng một mặt cầu hai chiều chia khối h cầu bậc ba thành hai quả cầu, bao đóng của mỗi quả cầu là một quả cầu ba chiều. Ông đã sử dụng lí luận tương tự để chứng minh rằng bất kì hình xuyến đa diện nào trong không gian ba chiều cũng giới hạn bởi một hình xuyến rắn hai chiều, một thực tế được Dehn giả định mà không có chứng minh và được

1932, ông đưa ra một trong những bài diễn thuyết chính và nhấn mạnh tầm quan trọng của giả thuyết Poincaré.[201] Ngay sau đó, J H C Whitehead (1904-1960), nhà toán học hiền lành và được yêu thích người Anh, người đã được đào tạo tại Princeton và sau này khởi đầu truyền thống mạnh mẽ về topo học ở Oxford, công bố chứng minh cho một định lí có thể chứng minh giả thuyết Poincaré.[202] Kết quả này vượt qua vòng kiểm duyệt của các nhà phê bình, và được in. Sau đó không lâu, Whitehead phát hiện ra một phản ví dụ cho định lí của mình. Phản ví dụ Whitehead, giống như phản ví dụ của Poincaré, đã cho chúng ta biết nhiều điều nhưng không cho biết gì thêm về phỏng đoán cả. Tỉ số lúc này vẫn là Poincaré - 3, các nhà toán học khác - 0. Bạn bè của ông quy kết rằng chính sự chính xác đến mức đau đớn trong các bài báo tiếp theo của Whitehead là lí do của sự rắc rối này.

Đến năm 1936, giả thuyết Poincaré là một trong những bài toán nổi tiếng nhất của toán học, và topo học đã thực sự trưởng thành. Hai văn bản có sức ảnh hưởng, cả hai đều là kết quả của những sự hợp tác thú vị, được công bố làm cho công trình của Poincaré trở nên dễ hiểu

---

Tietze phỏng đoán (người chỉ ra rằng nó không rõ ràng và cần được chứng minh).

[201] J. W. Alexander, "Some Problems in Topology", *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zurich* (1932), Kraus Reprint (1967): 249-57.

[202] Ông quả quyết rằng mọi đa tạp ba chiều mở có thể liên tục biến dạng thành một điểm thì đều đồng phôi với R^3.

hơn bằng cách cẩn thận hoàn thiện các kiến thức cơ bản.[205] Cả hai đều đi xa hơn thông qua việc mở rộng đáng kể một số kết quả của Poincaré và đều nhấn mạnh đến giả thuyết Poincaré.

Cuốn sách đầu tiên là *Lehrbuch der Topologie*, của Seifert và Threlfall, xuất hiện vào năm 1934. Nó phát triển phương pháp tiếp cận bằng các khối đa diện, và chứa đầy các ví dụ và ghi chú đẹp đẽ. Cuốn sách khởi đầu từ khi chàng trai hai mươi tuổi Herbert Seifert ghi danh vào khóa học topo của William Threlfall tại trường Đại học Kĩ thuật Dresden. Trí tưởng tượng của Seifert bùng cháy, hai người sớm trở thành bạn bè và cộng tác viên. Seifert trải qua học kì 1928/29 tại Göttingen, nơi ông đã gặp Heinz Hopf, một nghiên cứu sinh sau tiến sĩ, và Pavel Aleksandrov, một người từ Moscow đang làm khách ở đây, và là người sau này lập nên trường phái topo Moscow vĩ đại. Seifert trở về Dresden, chuyển vào ở nhà Threlfall, và hai người làm việc không ngừng nghỉ về các đa tạp ba chiều.

Theo nhật ký của ông, Threlfall đã muốn rằng lời mở đầu của cuốn sách được triển khai từ giáo án của mình bằng câu "Cuốn sách này ra đời từ một khóa học mà một trong hai chúng tôi giảng bài cho người còn lại tại Đại học Kĩ thuật Dresden, nhưng ngay sau đó người sinh viên lại đóng góp các ý tưởng mới với số lượng nhiều và căn bản đến nỗi mà tên của tác giả gốc tốt hơn cả là nên bị bỏ đi ở

[205] Cuốn sách của Veblen vào năm 1922 (O. Veblen, *Analysis Situs* [New York: American Mathematical Society, 1922]) thảo luận giả thuyết Poincaré (chapter 5, §39, p. 147), nhưng không được dùng như một cuốn sách giáo khoa.

trang tiêu đề." Lời mở đầu của cuốn sách trong thực tế là, "Tác nhân kích thích ban đầu để viết cuốn sách giáo khoa này là một loạt bài giảng mà một trong hai chúng tôi (Threlfall) trình bày tại Đại học Kĩ thuật Dresden." Cuốn sách này phát triển các khái niệm chủ đạo của topo học thông qua các ví dụ một cách cẩn trọng. Nó chứa đựng một thảo luận kĩ càng về không gian khối mười hai mặt của Poincaré và kêu gọi sự quan tâm đến giả thuyết Poincaré: "Liệu khối cầu bậc ba có được đặc trưng bởi nhóm cơ bản của nó hay không là nội dung của 'giả thuyết Poincaré' và vẫn chưa được chứng minh cho đến ngày hôm nay." Sợ người đọc sao nhãng điểm này, họ đặt câu hỏi theo cách khác: "Bên cạnh khối cầu bậc ba, liệu có tồn tại đa tạp ba chiều khép kín khác sao cho mỗi quỹ đạo có thể co rút thành một điểm?"[204]

Cuốn sách thứ hai, *Topologie*, viết bởi Aleksandrov và Hopf, được lên khuôn in trong quá trình diễn ra hội thảo

---

[204] Xem thêm thông tin về cuộc đời Seifert trong bản tiểu sử vắn tắt viết bởi Dieter Puppe, "*Herbert Seifert: May 27, 1907-October 1, 1996*", trong *History of Topology*, ed. I. M. James, (1021-27). Đoạn chép từ nhật ký của Threlfall được trích trong đó. Nguyên bản tiếng Đức như sau. "Das Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die er eine von uns dem anderen im Jahre 1927 an der Technische Hochschule Dresden gehalten hat. Bald hat aber der Horer so wesentlich neue Gedanken zur Ausarbeitung beigetragen und sie so von Grund auf umgestaltet, daß eher als sein Name der des ursprünglichen Verfassers auf dem Titelblatte fehlen drüfte." *Lehrbuch der Topologie* xuất bản năm 1934. Bản dịch tiếng Anh in năm 1980 Trích dẫn về giả thuyết Poincaré nằm ở trang 225 của bản dịch tiếng Anh. Bản dịch tiếng Anh được in cùng với bản dịch bài báo cơ bản của Seifert về đa tạp phân thớ.

quốc tế về topo học tại Moscow năm 1935. Đây là cuốn cẩm nang của chuyên ngành này, mặc dù nó chỉ là một trong số ba tập dự kiến được hoàn thành. Aleksandrov bắt đầu hợp tác với Hopf tại Göttingen từ năm 1926. Trước đó, Hopf đã phân loại các đa tạp bậc ba đơn liên có độ cong không đổi trong luận án tiến sĩ tại Đại học Berlin. Cả hai trải qua năm học 1927-1928 tại Princeton. Aleksandrov trở thành Giáo sư Toàn phần tại Đại học Moscow năm 1929. Cùng năm đó, Hopf được đề cử chức Trợ lí Giáo sư tại Princeton, nhưng chọn ở lại Châu Âu và nhận một vị trí lãnh đạo tại Zurich năm 1931. Rõ ràng là nỗ lực của sự quốc tế hóa đã ra đời từ đống tro tàn giữa hai cuộc chiến. Điều quan trọng hơn so với chủ đề của chúng ta là cuốn cẩm nang của họ đã cho rằng phỏng đoán của Poincaré là đúng từ ngay phần giới thiệu của nó.

SỰ NỔI LÊN CỦA TOÁN HỌC TẠI MĨ

James W. Alexander, người Mĩ sống ở Paris, là sinh viên của nhân vật có ảnh hưởng là Oswald Veblen. Cả hai nhà toán học này đều là người Mĩ, điều này báo hiệu một sự thay đổi sâu sắc đang diễn ra tại Mĩ. Trước khi thế kỉ 20 bắt đầu, không trường đại học Mĩ nào có thể tuyên bố một cách thuyết phục là đạt được đẳng cấp thế giới, và không có người Mĩ nào có thể nhận được một sự giáo dục toán học đầy đủ nếu không ra nước ngoài.[205] Nếu

[205] Ở đây không có ý khảo sát toàn bộ lịch sử toán học Mĩ. Có lẽ nhà toán học sinh ra ở Mĩ kiệt xuất nhất thế kỉ 19 là Willard Josiah Gibbs

Riemann hoặc Poincaré được đào tạo tại Mĩ, họ có thể đã không trở thành các nhà toan học. Điều này sẽ thay đổi trong thế kỉ mới, và toán học trở nên hoàn toàn khác.

Tuy vậy, một số điểm đặc biệt của nền giáo dục đại học Mĩ cũng đã được thiết lập vào đầu thế kỉ (20). Một ủy ban cấp cao đứng đầu bởi hiệu trưởng Đại học Harvard vào năm 1892 bác bỏ việc thành lập tiêu chuẩn quốc gia cho các trường phổ thông, và đi xa hơn nữa, cả tiêu chuẩn đầu vào cho giáo dục đại học. Đến cuối thế kỉ 19, Mĩ đã có một số lượng lớn và đa dạng các cơ sở đào tạo đại học, cả công lẫn tư. Ba mươi năm tiếp theo của cuộc nội chiến là thời kì một sự tăng trưởng thịnh vượng khổng lồ, và sự bùng nổ lớn nhất của giáo dục cấp cao trong lịch sử đất nước. Các học viện mới ở cấp bang được thành lập, cùng với các trường đại học dành riêng cho phụ nữ và người Mĩ gốc Phi. Các tổ chức này cần rất nhiều giảng viên. Hơn nữa, người Mĩ có tham vọng và nhận ra sự cần thiết của giáo dục sau đại học và nghiên cứu. Một số trường đại học lâu đời hơn bắt đầu thử nghiệm thành lập các chương trình đào tạo tiến sĩ theo phong cách Đức,[216] và

(1839-1903). Ông nhận bằng tiến sĩ đầu tiên của Đại học Yale về kĩ thuật năm 1863. Nhưng quá trình phát triển toán học của ông thì lại diễn ra ở Paris, Berlin, và Heidelberg từ năm 1866 đến năm 1869.

[216] Yale là trường đại học đầu tiên có chương trình tiến sĩ vào năm 1847 với ba bằng PhD được cấp vào năm 1861 (triết học và tâm lí học, văn học cổ điển, và vật lí). Pennsylvania, Harvard, Michigan, và Princeton theo sau hơn một thập kỉ. Đại học Johns Hopkins, chủ yếu tập trung vào giáo dục sau đại học, bắt đầu mở vào năm 1876 và thực sự thay đổi toàn diện. Nhưng thành công đã chững lại khi trường không thể lôi kéo Klein về để thay thế Sylvester. Đại học

các học viện sau đại học mới được thành lập. Tuy nhiên, chất lượng là điều còn thiếu: Việc xây dựng một cách thực sự thành công các chương trình sau đại học, ít nhất là trong toán học, vượt quá tầm của người Mĩ. Các nhà toán học giống như những con chip máy tính. Để có được những con chip tuyệt hảo, ta cần phải có rất nhiều con chip có chất lượng tốt. Và trong trường hợp của các nhà toán học, điều này sẽ có tác dụng nếu những người rất giỏi có biệt tài trong việc nhận ra và khuyến khích các tài năng.

Chicago là nơi có được sự kết hợp đúng đắn giữa tiền bạc, tài năng, cơ may, và nỗ lực. Giáo phái Tin Lành Baptists của nước Mĩ và toàn thể công dân Chicago đã quyết định thành lập một trường đại học ở Chicago, và người sáng lập kiêm giám đốc điều hành của tập đoàn Standard Oil, John D. Rockefeller, một thành viên ngoan đạo của giáo phái Tin Lành, đã ủng hộ về mặt tài chính. Từ đầu, Đại học Chicago đặt ra nhiệm vụ phát triển tri thức thông qua nghiên cứu và giáo dục sau đại học, cũng như

Clark là một học viện khác hoạt động chủ yếu tập trung vào chương trình sau đại học. Nó có một số triển vọng, nhưng không bao giờ thực sự nhận ra điều đó bởi vì thiếu thực lực. Với một ngoại lệ gây tranh cãi là Harvard, nhờ Osgood và Bôcher, có thể mạnh thực sự về giải tích, cả nước Mĩ không có khoa toán học sau tiến sĩ hạng nhất nào cả. Xem thông tin thêm về viễn cảnh toán học trong K. H. Parshall và D. E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematical Community 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore* (Providence: American Mathematical Society, 1994). Chương 6 của cuốn sách đặc biệt có thông tin hay và nguồn thông tin tham khảo lưu trữ phong phú về bối cảnh toán học thời đó và sự thành lập Đại học Chicago.

đào tạo nguồn nhân lực cho nền giáo dục bậc đại học. Rockefeller tuyển dụng William Rainey Harper, giáo sư tại trường Thần học Yale cho vị trí hiệu trưởng. Mặc dù cùng thời có nhiều hiệu trưởng vĩ đại của các trường đại học khác, Harper vẫn vượt lên như một nhà quản trị có tầm nhìn nhạy bén về chất lượng và mục đích chủ đạo. Ông tuyển về trường một tài năng trẻ vùng Trung-Tây, E.H. Moore từ Yale, và họ đã làm việc với nhau để lập ra một chương trình toán học hạng nhất. Một phần để cạnh tranh với đối thủ là Đại học Clark mà nỗi cay đắng vẫn còn được nhắc tới ngày hôm nay, họ đã tuyển dụng hai người Đức nhập cư, cả hai đều là sinh viên cũ của Klein, cho khoa toán. Điều kì diệu đã đến với họ, khoa Toán của Đại học Chicago nổi lên với năng suất đáng kinh ngạc, cả về số lượng các bài báo khoa học - và quan trọng hơn cho nước Mĩ - lẫn số lượng các nhà toán học được đào tạo tại đây. Có một đối thủ duy nhất khác, nhưng không hiệu quả bằng, ngoại trừ - điều này còn phải tranh luận - lĩnh vực giải tích, là Harvard, nơi hai sinh viên khác của Klein cầm trịch.[207] Các sinh viên tốt nghiệp tiến sĩ ở Chicago tiếp tục xây dựng các khoa toán học chủ đạo trên khắp đất nước.[208]

---

[207] Osgood nhận bằng tiến sĩ từ Erlangen, còn Bôcher từ Göttingen

[208] Bốn sinh viên của Moore là L. E. Dickson (1874-1954), Oswald Veblen (1880-1960), R. L. Moore (1882-1974), và G. D. Birkhoff (1884-1944) nằm ngoài bất cứ bảng xếp hạng nào, còn ảnh hưởng của họ đến nền toán học Mĩ là không thể đo được. Mỗi người là một nhà toán học xuất sắc, khả năng quản lí thiên tài, và khả năng hướng dẫn tiến sĩ tuyệt diệu. Birkhoff đưa khoa toán tại Harvard lên đến sự ưu việt thật sự; Veblen cũng làm như vậy tại Princeton; R. L. Moore ở Đại học Texas ở Austin; và Dickson tiếp nối truyền thống của Đại học Chicago.

Hai trong số sinh viên của Moore, Oswald Veblen (1880-1960) và George D. Birkhoff (1884-1944), tốt nghiệp Đại học Harvard và đến Đại học Chicago để làm luận án tiến sĩ. Veblen tốt nghiệp năm 1903, còn Birkhoff năm 1907. Sau hai năm giảng dạy tại Chicago, Veblen chuyển đến Princeton vào năm 1905 để giữ một trong những vị trí mà hiệu trưởng Princeton lúc đó, và tổng thống Mĩ tương lai, Woodrow Wilson đã nỗ lực thiết lập để nâng cao trình độ nghiên cứu của trường đại học này. Đến năm 1910, Wilson trở thành Thống đốc của bang New Jersey; Trưởng khoa Toán, Henry Fine trở thành người đứng đầu tập thể giảng viên; và Veblen trở thành Giáo sư. Birkhoff chuyển đến Harvard năm 1912 sau khi giữ chức Trợ lí Giáo sư tại Princeton.

Klein có thể là người đào tạo nên các nhà toán học tiền bối tại Chicago và Harvard, nhưng Poincaré mới là người đốt lên ngọn lửa sức tưởng tượng của lớp trẻ. Luận án của Veblen là về các tiên đề của hình học, nhưng ông chuyển sang topo học và thuyết tương đối trong những năm sau tiến sĩ. Công trình topo học đầu tiên của ông xuất hiện năm 1905, pha trộn các tiên đề hình học với topo học của mặt phẳng.[209] Veblen giới thiệu ý tưởng về topo học của Poincaré đến giới toán học Mĩ trong cuốn sách năm 1922 của ông. Birkhoff đọc một cách độc lập công trình của Poincaré về các hệ thống động lực học và nghiên cứu sâu sắc phương pháp mang tính topo học của Poincaré để tìm hiểu các hệ phương trình vi phân. Năm 1913, ông trở nên nổi tiếng khi chứng minh định lí hình

---

[209] O. Veblen, "Theory on plane curves in non-metrical analysis situs", *Transactions of the American Mathematical Society*, 6 (1905) 83-98.

học cuối cùng của Poincaré, định lí mang tính phỏng đoán mà Poincaré chưa thể chứng minh được và miễn cưỡng công bố nó vào năm ông qua đời (1912). Ở Göttingen, việc một người Mĩ đã tìm ra lời giải cho định lí đó là một điều khó tưởng tượng.

Cả Birkhoff và Veblen làm việc không biết mệt mỏi vì toán học. Birkhoff trở thành Phó Chủ tịch Hội Toán học Mĩ vào năm 1919, và Chủ nhiệm Khoa Nghệ thuật và Khoa học Harvard năm 1936. Ảnh hưởng về mặt toán học của ông là cực kì lớn, và một số sinh viên của ông đã trở thành các nhà toán học mà người ta sẽ còn nhớ tới trong nhiều thế kỉ sau đó. Còn Veblen, với nhiều người, ông là người có công khiến Princeton trở thành một trong những trường đại học lớn của thế giới về toán học. Khoa toán này tập trung vào một số ít các lĩnh vực đang nổi lên như: topo học, hình học vi phân, vật lí toán học, và logic toán học. Đến Thế chiến I, Princeton bắt đầu trở thành đối thủ của các học viện châu Âu như Göttingen va hai trường đại học ở Vienna về topo học. Cuối thập kỉ 1920, không cần bàn cãi nữa: Princeton đã trở thành học viện dẫn đầu thế giới. Veblen hiểu tầm quan trọng của việc quyên tiền từ các cựu sinh viên và các nguồn tư nhân, và ông thực hiện điều này vô cùng hiệu quả trên cả hai mặt.[210] Ông giám sát việc xây dựng một lâu đài toán học mới mà sau này trở thành thỏi nam châm thu hút các nhà toán học trên toàn thế giới. Veblen đóng một vai trò quan trọng trong sự ra đời Viện

[210] Xem L. B. Feffer, "Oswald Veblen and the Capitalization of American Mathematics: Raising Money for Research, 1923-1928", *Isis* 89 (1998): 474-97.

Nghiên cứu Cấp cao và trong việc đặt trụ sở của nó ở Princeton. Năm 1932, ông từ chức giáo sư nghiên cứu, mặc dù đã được nêu danh ở trường đại học để trở thành giáo sư đầu tiên tại Viện Nghiên cứu Cấp cao.[211]

Cả Veblen và Birkhoff đều nổi tiếng thế giới, và giữ gìn các mối quan hệ ở khắp châu Âu. Tuy nhiên, trong nỗ lực xây dựng cộng đồng toán học Mĩ, Birkhoff có xu hướng tiến tới một loại hình của chủ nghĩa bảo hộ, ông tranh luận trên báo chí rằng những nỗ lực tuyển dụng các nhà toán học châu Âu tị nạn của các học viện Mĩ sẽ lấy đi số lượng công việc hiếm hoi của người Mĩ ở các trường đại học.[212] Một cách bi kịch và ngu ngốc, ông cũng tìm cách hạn chế số lượng người Do Thái trong các vị trí học thuật tại Harvard và các nơi khác. Veblen, thì ngược lại, đã tạo ra một cộng đồng đa dạng hơn rất nhiều. Princeton cùng lúc vừa ươm tài những người trẻ tuổi, vừa thúc đẩy nguồn nhân lực nội bộ, và lợi dụng tình hình của Đức Quốc xã để thu hút Albert Einstein, John von Neumann, và Hermann Weyl vào các vị trí giảng dạy. Vào giữa những năm 1930, Princeton có năm nhà topo học huyền thoại[213] và nhiều nhà topo học trẻ đầy triển

---

[211] Giáo sư danh dự: Named professor, chức danh giáo sư được đặt tên để vinh danh một người nổi tiếng hoặc người tài trợ cho vị trí này (ND).

[212] Xem, ví dụ như, G. D. Birkhoff, "Fifty Years of American Mathematics", *Science* 88, số. 2290 (1938): 461-67 (đặc biệt trang 465).

[213] Đó là James Alexander (1915-51, sinh viên của Veblen), Marston Morse (1892-1977, sinh viên của Birkhoff), Hassler Whitney (1907-89, sinh viên của Birkhoff), Solomon Lefschetz (1884-1972, sinh viên của William Story, một sinh viên của Klein), và Norman Steenrod (1910-71, sinh viên của Lefschetz).

vọng. Mĩ đã vào cuộc: nghiên cứu topo một cách nghiêm túc có nghĩa là phải trải qua một thời gian ở Princeton.

Ngoài Alexander, thành công sớm và rực rỡ của Veblen là việc tuyển dụng được Solomon Lefschetz, một người Nga gốc Do Thái nhập cư từ Paris năm 1905. Lefschetz làm việc như một kĩ sư cho công ti Westinghouse Electric cho đến khi mất cả hai tay trong một vụ nổ lò hơi, và do đó không thể theo nghiệp kĩ sư được nữa. Ông trở lại trường học, nhận bằng tiến sĩ toán từ Đại học Clark năm 1911. Sau đó ông chuyển đến Nebraska trong hai năm, rồi đến Kansas trong mười một năm. Cách xa luồng toán học chính thống, ông làm việc một cách khá biệt lập và đưa các ứng dụng topo học của Poincaré vào hình học đại số lên tầm cao hơn nhiều so với những gì Poincaré đã làm. Ông chuyển đến Princeton năm 1924. Nói to, dễ bị kích động, với hai bàn tay kim loại bọc bằng nhựa đen và ăn mặc xấu, ông là tất cả những gì mà nhiều cư dân Princeton có trình độ văn hóa cao nhất không có. Lefschetz có thể nhiệt tình đến quên mình trong một cuộc thảo luận về toán học, hăng hái theo đuổi những ý tưởng đến tận cùng, đến nỗi quên đi những người xung quanh hay các quy tắc mang tính xã hội.[214] Mọi người thường tránh xa ông trong các bữa tiệc.

---

[214] Xem tính cách sôi nổi của Lefschetz, ngay cả khi già, trong bài luận của ông "Reminiscences of a Mathematical Immigrant in the United States", *American Mathematical Monthly* 77 (1970): 344-50, viết hai năm trước khi ông mất.

Lefschetz nhiều hơn Alexander bốn tuổi, và cả hai càng ngày càng khác xa nhau. Alexander giàu có và tinh thông chuyện xã hội. Lefschetz thì không. Alexander phẫn nộ khi cảm thấy Lefschetz độc chiếm các ý tưởng một cách phi lí. Lefschetz dấn thân vào tất cả, Alexander lại thiếu hoài bão một cách kì quặc. Lefschetz chưa bao giờ tha thứ cho Veblen khi lựa chọn Alexander thay vì ông cho một trong những vị trí giáo sư đầu tiên tại Viện Nghiên cứu Cấp cao. Mặc dù vậy Lefschetz vẫn kế thừa vị trí lãnh đạo của Veblen, mà không phải giảng dạy.

Vì tất cả những điều đó, Lefschetz thật tuyệt vời. Ông chào đón tất cả, sức hấp thụ dành cho toán học của ông là cực kì lớn, và các tiêu chuẩn của ông rất cao. Ông làm cho Princeton trở nên thực sự xuất sắc. Lefschetz cũng là người kì quặc. Khi giữ một vị trí chủ tọa ở đây, ông luôn phải đem theo một đồng nghiệp giỏi ngoại giao hơn mình khi đến phòng lãnh đạo. Lefschetz bước vào phòng với ý nghĩ rằng ông đương nhiên phải có nhiều quyền hạn ở khoa. Còn người lãnh đạo thì không nghĩ như vậy. Lefschetz bị kích động. Lời qua tiếng lại. Người đồng nghiệp giỏi ngoại giao cần có mặt ở đó để kéo Lefschetz ra trước khi mối quan hệ giữa người quản lí và cả khoa toán bị tổn thương một cách không thể cứu vãn.

TRƯỜNG PHÁI NGA

Nga đã có một truyền thống nghiên cứu toán học lớn mạnh kể từ khi Viện Hàn lâm Saint Petersburg được

thành lập năm 1725. Đối trọng của Veblen là Nikolai Nikolaevich Luzin (1883-1950). Ông nuôi dưỡng cả một thế hệ các nhà toán học đi qua các cuộc chiến tranh và Cách mạng Nga, nhóm nghiên cứu của ông được các sinh viên của ông gọi là Luzitania. Nhóm này bao gồm vài nhà topo học rất tài năng, những người đã góp phần biến Đại học Moscow thành một trong những trung tâm toán học lớn nhất trên thế giới. Sinh viên đầu tiên của ông là Pavel Aleksandrov, người mà chúng ta đã nói đến trước đó. Một người khác là Andrei Kolmogorov (1903-1987), một trong những nhà toán học nổi tiếng nhất mọi thời đại. Ngay cả khi là sinh viên đại học, Kolmogorov đã bắt đầu đưa ra nhiều kết quả quan trọng. Ông công bố tám bài báo trong năm học cuối cùng ở đại học, và mười tám bài trong khi làm nghiên cứu tiến sĩ. Nhiều người vẫn coi những bài báo này là kinh điển. Aleksandrov và Kolmogorov trở nên rất thân thiết. Năm 1935, họ mua một căn nhà nhỏ trong ngôi làng Komarovka ở ngoại vi Moscow, nơi họ tiếp đón rất nhiều nhà toán học. Năm 1938, Aleksandrov cùng Kolmogorov và một số nhà toán học khác của Đại học Moscow gia nhập Viện Hàn lâm Khoa học (Học viện Steklov) trong khi vẫn giữ các vị trí của họ tại các trường đại học.

Năm 1935, đại hội quốc tế đầu tiên hoàn toàn dành riêng cho topo học được tổ chức tại Đại học Moscow. Tám người Mĩ, chủ yếu là đến từ Đại học Princeton đã tham dự. Một số đột phá quan trọng được công bố. Công bố sửng sốt nhất liên quan đến việc khám phá ra một tập hợp mới các cấu trúc đại số gắn với các đa tạp và các

không gian topo khác. Những cấu trúc như vậy được gọi là *các vành đối đồng điều* (cohomology rings), là một dạng ảnh phản chiếu trong gương của các nhóm đồng điều mà Poincaré đã định nghĩa, nhưng chúng có hai phép toán đại số thay vì chỉ một như các nhóm đồng điều. Những vành này mang các thông tin topo tinh vi hơn, và là bước tiến lớn nhất kể từ thời Poincaré. Chúng cũng làm rõ một số nhận xét bí ẩn của Poincaré[23]. Kolmogorov đã công bố khám phá này. Trong bài diễn thuyết tiếp theo, Alexander thú nhận rằng ông cũng thu được các kết quả gần tương tự, và cũng nói về cùng một chủ đề. Cả hai người đều đã gửi công trình để xuất bản.

Đáng buồn thay, năm kế tiếp của đại hội diễn ra sự thanh trừng của chính quyền. Luzin bị tấn công qua tờ báo *Pravda*. Ông bị cáo buộc tuyên truyền chống Liên bang Xô viết và xuất bản các bài báo quan trọng của mình trên các tạp chí nước ngoài thay vì các tạp chí trong nước. Ông thoát chết trong gang tấc. Ông buộc phải từ chức ở Đại học Moscow, nhưng vẫn giữ chức vụ của mình ở Viện Hàn lâm Khoa học. Tác động của sự thanh trừng ông là các nhà toán học Liên Xô ngừng xuất bản ở phương Tây và bắt đầu chỉ xuất bản ở Nga trên các tạp chí tiếng Nga. Sự cô lập này làm hại cả giới toán học phương Tây lẫn Nga trong nhiều năm sau.

---

[23] Trong bài bổ sung đầu tiên, Poincaré giới thiệu các ô đối ngẫu (dual cells) và một hệ phức ô "tương hỗ" (a "reciprocal" cell complex), cùng với một phép tính chung trên các đơn hình (simplex) mà ông thêm vào cho rõ nghĩa. Khó có thể làm rõ nghĩa các lập luận này nếu không đưa vào khái niệm đối đồng điều.

NƯỚC ĐỨC SAU CHIẾN TRANH

Khi Thế chiến I nổ ra, Göttingen vắng vì từng người bị gọi nhập ngũ. Sau chiến tranh, dưới sự lãnh đạo của Richard Courant, nó bắt đầu lấy lại phần nào vị thế trước đây của mình. Đức gặp vấn đề lớn về tài chính, nhưng cuộc chiến tranh xóa tan mọi nghi ngờ về tiềm năng của khoa học và công nghệ trong việc tạo ra năng suất công nghiệp, và trong thiết kế cũng như sản xuất vũ khí. Một toa nhà toán học mới được dựng lên và trở thành trọng tâm của toàn cảnh toán học sống động.

Sau cái chết của Poincaré, Hilbert trở thành nhà toán học số một thế giới. Ông từ chối kí tuyên bố mà Klein đã kí, và điều này khiến ông phải nhận khá nhiều sức ép từ các sinh viên và cư dân Göttingen. Nhưng đó chỉ là một làn gió ban đầu thoảng qua của những gì sắp xảy ra. Suy thoái kinh tế gây ra bởi các khoản tiền bồi thường chiến tranh và sự khủng hoảng kinh tế toàn cầu đã kích động các cử tri Đức. Trong cuộc bầu cử Reichstag năm 1932, Đảng Quốc xã thắng lớn. Tổng thống von Hindenburg bổ nhiệm Adolf Hitler làm Thủ tướng Đức. Nỗi kinh hoàng bắt đầu, và ánh sáng mờ dần. Các trường đại học bị yêu cầu loại bỏ tất cả những người bị gọi là Do Thái - dù chỉ mang trong mình dòng máu Do Thái - cho dù họ đang ở bất kì vị trí giảng dạy nào. Richard Courant, Edmund Landau, Emmy Noether, Paul Bernays ra đi. Sau đó còn nhiều người nữa, gồm cả những người có gốc gác hoặc có vị hôn thê là người Do Thái. Ngồi bên cạnh Bộ trưởng Giáo dục mới bổ nhiệm của Đức Quốc xã trong một bữa

tiệc, Hilbert được hỏi, "Toán học ở Göttingen bây giờ như thế nào sau khi thoát khỏi ảnh hưởng của người Do Thái?".

"Toán học ở Göttingen ư?", Hilbert trả lời. "Thực sự chẳng còn gì nữa."[216]

[216] Trích trong C. Reid, *Hilbert* (New York: Springer, 1970), 205.

13

Không gian nhiều chiều

Chỉ vỏn vẹn có hai mươi năm sau Thế chiến I, Thế chiến II xảy ra, tàn phá thêm một thế hệ châu Âu nữa. Tuy không ở mức độ nghiêm trọng như các nước châu Âu, nước Mĩ cũng chịu tổn thất. Nhờ chiếc phao gồm chủ nghĩa lạc quan và chủ nghĩa lí tưởng mà nước Mĩ nổi lên sau cuộc chiến. Cũng như trong Thế chiến I, nhiều nhà toán học phải góp sức cho chiến tranh và chuyển qua các lĩnh vực toán học có tính áp dụng tức thời hơn cho chiến sự. Họ đóng vai trò lớn trong việc phát triển rada, bom nguyên tử và năng lượng hạt nhân, mã hóa và giải mã, máy bay phản lực và khí động lực học. Một mặt, việc tham gia vào chiến tranh đã lấy đi sự trong trắng của các nhà toán học, nhiều người sau đó bị ám ảnh tâm can do sự vi phạm đạo đức qua những gì mà họ sản xuất ra. Mặt khác, không ai có thể nghi ngờ hiệu quả của toán học và khoa học, và thành công của các nhà toán học đã làm tăng một lượng khổng lồ số tiền dành cho nghiên cứu. Quỹ Khoa học Quốc gia (Mĩ) được thành lập năm 1952 với nhiệm vụ hỗ trợ khoa học cơ bản. Các cơ quan khác

của chính phủ liên bang Hoa Kì bắt đầu tài trợ cho khoa học và toán học.

Binh sĩ giải ngũ tràn ngập trong các trường đại học của cả nước thông qua chương trình GI Bill[217], tạo nên sự bùng nổ giáo dục đại học lớn nhất kể từ thời nội chiến. Một cách đặc trưng rất Mĩ, những tầm nhìn thông thái phải cạnh tranh với sự thiển cận man rợ. Kế hoạch Marshall ủng hộ việc xây dựng lại châu Âu, và một quyết định của tòa án tối cao cấm sự phân biệt trong các trường học công của Mĩ, mở ra sự hứa hẹn chưa từng có cho phép trẻ em mọi sắc tộc, mọi giới tính, thuộc bất kì nền tảng kinh tế nào được quyền tiếp cận giáo dục tiểu học và trung học hạng nhất. Chiến tranh lạnh bắt đầu và Ủy ban Hoạt động của Hạ viện Mĩ[218] đe dọa dập tắt sự tự do trong tư tưởng.

BỐN CHIỀU VÀ ĐA CHIỀU HƠN NỮA

Toán học cơ bản không tĩnh lặng - nhất là trong ngành topo học - như là vẻ ngoài thoáng qua. Các hoạt động toán học vẫn diễn ra nếu ta quan sát một cách đủ cẩn thận, nhưng chiến tranh đã cắt đứt mọi mối dây liên hệ.

---

[217] G.I. Bill: Chương trình hòa nhập cộng đồng dành riêng cho các binh sĩ Mĩ vừa giải ngũ, cung cấp chi phí học đại học hoặc học nghề cùng một năm trợ cấp thất nghiệp (ND).

[218] Ủy ban Hoạt động của Hạ viện Mĩ (House Un-American Activities Committee), tồn tại từ năm 1938-1975, một phần chức năng của nó được chuyển vào Ủy ban Tư pháp (ND).

Các cá nhân vẫn tiếp tục tư duy về toán học, nhưng phải mất thời gian để mọi thứ quay trở lại bình thường, cũng như để cho cuộc sống và các trường đại học được tái thiết.

Đê vỡ vào cuối những năm 1950. Đến năm 1960, chúng ta đứng giữa thời đại có năng suất và mang tính bùng nổ cao nhất của quá trình phát triển tư tưởng toán học trong lịch sử loài người. Không gì có thể sánh được với nó: cho dù đó là các cung điện Babylon, hay là các trường phái của người Hi Lạp ở Athens và Alexandria, kể cả trào lưu Phục hưng hay Khai sang ở châu Âu hoặc nước Đức của thế kỉ 19. Sự phát triển bung nổ xảy ra trên toàn thế giới, ở hầu hết mọi lĩnh vực của toán học. Các lĩnh vực cốt lõi như hình học, topo học, đại số, và giải tích phát triển cực mạnh, các bộ môn mới giáp ranh cũng như các ngành nhỏ bên trong những ngành này phát triển rực rỡ thành các lĩnh vực mới với nhiều phương pháp đầy quyền lực và nhiều kết quả ngoạn mục của riêng chúng. Tiến bộ này nối tiếp tiến bộ kia trong khoa học tính toán, khoa học thông tin và toán học ứng dụng; và được tiếp sức bằng sự phát triển lớn mạnh đáng kinh ngạc của kiến thức toán học.

Kể từ góc nhìn topo học và phỏng đoán của Poincaré, phát hiện bất ngờ của John Milnor năm 1956 dường như là sự kiện kết tinh những thăng trầm. Milnor nhận bằng cử nhân từ Princeton năm 1951, bằng tiến sĩ năm 1954, và tiếp tục ở lại làm giảng viên. Khi còn là sinh viên, ông đã giải quyết một vấn đề tồn đọng lâu năm về các *nút thắt* toán học (các đường cong khép kín trong một không gian

ba chiều).[illegible] Người ta kể lại rằng ông đã tưởng nhầm đây là một bài tập về nhà. Một vài năm sau, năm 1956, lúc chưa đầy 25 tuổi, Milnor sử dụng một vài công trình mới ra đời, vẫn chưa được hệ thống hóa của nhà toán học người Pháp René Thom, để chỉ ra rằng có các cách khác nhau về cơ bản để làm giải tích trên một hình cầu bảy chiều. Điều này thu hút trí tưởng tượng của các nhà toán học ở khắp mọi nơi, và mở ra một thế giới hoàn toàn mới.

Hãy để tôi giải thích một cách ngắn gọn. Cũng giống như sự tồn tại của không gian Euclid với số chiều bất kì, cũng tồn tại các hình cầu với số chiều bất kì. Mặt cầu hai chiều thông thường có thể được xem như là tập hợp các điểm có khoảng cách không đổi, ví dụ như một đơn vị dài tính từ gốc của không gian ba chiều; và khối cầu bậc ba là tập hợp các điểm có khoảng cách đơn vị kể từ gốc của không gian bốn chiều (Để không gian bốn chiều bớt đi vẻ hư ảo, hãy nhớ rằng một điểm trong không gian bốn chiều được quy định bởi các bộ bốn số, và không gian bốn chiều chỉ là tập hợp của tất cả các bộ bốn số thực.). Tương tự, hình cầu bậc bảy là tập hợp của tất cả các điểm có khoảng cách đơn vị kể từ điểm gốc của không gian tám chiều (không gian tạo bởi tất cả các bộ tám số thực) hay của bất kì tập hợp nào đồng phôi với không gian đó. Cũng giống như các trường hợp của các hình cầu hai chiều hay ba chiều, hình cầu bảy chiều tồn tại độc lập với

[illegible] Milnor chỉ ra rằng tổng độ cong của một nút thắt không tương đương với một đường tròn không thắt nút là lớn hơn 4. Kết quả này được xuất bản trong biên niên sử: J. Milnor, "On the Total Curvature of Knots," *Annals of Mathematics* 52 (1950): 248-57.

không gian Euclid mà nó nằm bên trong. Nói chung, đối với bất kì số nguyên dương *n* nào, một hình cầu *n* chiều (hay hình cầu bậc *n*) là bất kì tập hợp nào đồng phôi với tập hợp các điểm có khoảng cách không đổi so với điểm gốc của không gian Euclid có số chiều nhiều hơn một so với nó.

Bất cứ khi nào ta có một đa tạp, ta cũng có một lớp các đối tượng toán học khác, gọi là các *hàm số*, trên đa tạp này. Một hàm số là một quy tắc bất kì gán các con số cho các điểm khác nhau trên đa tạp đo: các phép gán khác nhau cho ra các hàm số khác nhau. Vi-tích phân là môn học nghiên cứu các tốc độ thay đổi, gọi là các *đạo hàm*, của các hàm số. Nó nghiên cứu các hàm số thay đổi như thế nào, và làm thế nào để xác định một hàm số nếu ta biết các tốc độ thay đổi của nó. Có một phương pháp chính tắc để tính vi-tích phân trên không gian Euclid. Và, bởi vì hình cầu bậc bảy là một tập hợp con của không gian Euclid tám chiều, cho nên cũng tồn tại một phương pháp tính toán vi tích phân hoàn toàn đã được định nghĩa trên nó. Ta định nghĩa các tốc độ thay đổi của các hàm số và các đạo hàm của các đối tượng khác chỉ bằng cách xem xét chúng trong không gian tám chiều lớn hơn.

Tuy nhiên, theo một cách cũng trừu tượng và trong tinh thần hệt như của Riemann khi ông đã nhận xét rằng hình học bắt nguồn từ một cấu trúc bổ sung cho phép định nghĩa khoảng cách trên một không gian, tất cả những gì ta cần làm để tính toán vi tích phân là một định nghĩa nhất quán của sự thay-đổi ở cấp-độ-đầu-tiên: hay tính chất tuyến tính có nghĩa là gì. Hai quan sát viên phải

đồng thuận về điều được gọi là tính thẳng. Bất cứ một sự đồng thuận nào như vậy đều được gọi là *cấu trúc khả vi* (diferentiable structure). Milnor đã phát hiện ra rằng có các cấu trúc khả vi khác nhau trên hình cầu bậc bảy.[220] Có thể có hai hình cầu bậc bảy đồng phôi, nghĩa là, giữa chúng có một phép tương ứng một-một mang tính liên tục, nhưng chúng không thể liên hệ với nhau bằng một ánh xạ một-một mà tốc độ thay đổi của ánh xạ này được xác định ở khắp nơi và khác không. Thay vì chỉ có một thì có đến 28 cách để tính toán vi-tích phân trên hình cầu bậc bảy, tất cả đều khác nhau và tất cả đều không tương đương với nhau.

Lập luận của Milnor thật là ngoạn mục. Ông đã gộp topo học và giải tích lại một cách hoàn toàn bất ngờ, trong khi làm điều đó ông đã mở ra lĩnh vực topo vi phân. Ngoài ra, Milnor là một trong những cây bút toán học lịch duyệt nhất mọi thời đại. Văn xuôi toán học của ông đơn giản, khúc chiết, và cực kì đẹp đẽ. Văn phong của ông trong toán học có thể so sánh với Hemingway trong tiếng Anh hay của Simenon trong tiếng Pháp. Bài báo của ông diễn đạt chi tiết các cấu trúc khả vi khác nhau trên hình cầu bảy chiều chỉ gói gọn trong 6 trang giấy. Nó chứa đầy những nhận thức sáng chói.[221] Ông sử dụng một kĩ thuật

[220] Hai cấu trúc khả vi trên các đa tạp đồng phôi là tương đương nếu có một phép đồng phôi giữa các đa tạp sao cho phép đồng phôi này là khả vi về mọi hướng (nghĩa là, đối tượng đó và phép nghịch đảo của nó có đạo hàm xác định ở mọi điểm.).

[221] J. Milnor, "On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere", *Annals of Mathematics* 64 (1956): 399-405.

cực kì đơn giản để xác định một đa tạp có phải là hình cầu hay không[222] và nghiên cứu cấu trúc khả vi bằng cách nghiên cứu các đa tạp tám chiều mà biên của chúng là các hình cầu đang được chúng nói tới.

Khám phá của Milnor làm bùng ra một cơn lũ các công trình sau đó, mà kết quả sau ngoạn mục và gây ngạc nhiên nhiều hơn kết quả trước. Ít năm sau, Stephen Smale ở Berkeley, sử dụng những lập luận bắt nguồn từ Poincaré, nhưng được hoàn thiện bởi hai nhà topo học người Mĩ Marston Morse, Milnor và bởi nhà topo học người Nga Lev Pontryagin, để chứng minh mệnh đề tương tự với giả thuyết Poincaré cho tất cả hình cầu năm chiều hoặc có số chiều nhiều hơn. Chính xác hơn, ông đã chứng minh rằng với bất kì số chiều *n* nào lớn hơn bốn, một đa tạp *n*-chiều đơn liên không biên, không kéo dài đến vô hạn, và có cùng tính đồng điều như hình cầu *n*-chiều, đều là một hình cầu *n* chiều (Hãy nhớ rằng *đơn liên* có nghĩa là mỗi vòng lặp trên nó có thể co rút thành một

---

[222] Ví dụ, Milnor chỉ ra rằng các đa tạp mà ông đang xem xét là các hình cầu bằng cách tìm ra một hàm số trên đó có hai điểm tới hạn, đó là hai điểm mà tại đó tốc độ thay đổi bằng không về mọi hướng. Người ta đã biết đến trong một thời gian dài rằng bất kì hàm số liên tục nào trên một tập bị chặn đều có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Nếu, thêm vào đó, hàm số khả vi thì điểm có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất phải là điểm tới hạn của hàm số: điểm mà tại đó tốc độ thay đổi của hàm số trên mọi hướng đều bằng không. Sâu hơn và ít rõ ràng hơn là, nếu bạn có một hàm số trên một đa tạp compac có đạo hàm ở khắp nơi và nếu nó chỉ có hai điểm tới hạn thì đa tạp đó phải là hình cầu. Dữ kiện này có vẻ kì lạ. Nhưng dưới bàn tay Milnor, nó trở thành một công cụ chủ đạo.

điểm: theo ngôn ngữ của Poincaré, nhóm cơ bản của nó là đồng nhất thức.). Poincaré đặt nghi vấn liệu có thể khẳng định hay không mọi đa tạp ba chiều đơn liên, không biên và không kéo dài đến mãi mãi đều chính là một khối cầu ba chiều.

Lí do để cho tuyên bố ban đầu của giả thuyết Poincaré có vẻ đơn giản hơn mệnh đề tương tự mà Smale đã chứng minh được nằm ở chỗ, Poincaré đã chỉ ra rằng, tính đơn liên trong ba chiều dẫn đến việc tính đồng điều của đa tạp đó giống với tính đồng điều của một khối cầu. Điều này không đúng khi số chiều lớn hơn ba và cần phải được giả định.

Smale cũng chứng minh một kết quả quan trọng giúp liên hệ các tính chất của hai đa tạp là biên của một đa tạp có số chiều nhiều hơn chúng một chiều. Điểm này khiến công việc của Thom đi xa hơn nữa. Christopher Zeeman ở Anh, Andrew Wallace và John Stallings ở Mĩ đưa ra các chứng minh rất khác nhau. Các nhà toán học tìm ra được các đa tạp không có cấu trúc khả vi,[223] cũng như là rất nhiều đa tạp khác mang nhiều cấu trúc khả vi khác nhau.

Không gian nhiều chiều đã đến với chúng ta. Ta có thể nghĩ rằng, việc thiết lập các phiên bản nhiều chiều hơn của các kết quả và các phỏng đoán ở ba chiều sẽ khó khăn hơn. Ba chiều chắc chắn là khó nắm bắt hơn hai chiều. Thêm nhiều chiều hơn sẽ làm cho mọi thứ khó

---

[223] M. Kervaire, "A Manifold Which Does Not Admit and Differentiable Structure", *Commentarii Mathematici Helvetici* 34 (1960): 257-70. Ví dụ của Kervaire thu được từ một hình cầu chín chiều tuyệt đẹp.

hình dung hơn. Sự đa dạng tuyệt đối của các đa tạp khác nhau và tính chất của chúng tăng lên bội phần khi số chiều tăng lên. Nhưng lợi thế đổi lại là ta sẽ có nhiều khả năng hơn: những gì ta thiếu sót trong trực giác hình học được đền bù một cách hơn cả thỏa đáng bằng các khả năng mới của việc có thể tưởng tượng các hàm số có biểu hiện xấu, và các đối tượng toán học bất kì gần với chúng, bằng các đối tượng khác đơn giản hơn mà lại có tính chất đẹp đẽ hơn. Các nút thắt trong một đa tạp có thể được làm mượt đi, và các điểm tới hạn của các hàm số có thể được trượt lại một điểm khác và thường triệt tiêu lẫn nhau.[224]

Phương pháp của Smale đúng với các hình cầu năm chiều và cao hơn nữa nhưng lại bị phá vỡ hoàn toàn trong bốn chiều, chứ chưa cần phải đề cập đến ba chiều. Giả thuyết Poincaré cho các hình cầu bốn chiều được chứng minh hai mươi bốn năm sau, vào năm 1982, bởi Michael Freedman, làm việc tại Đại học California ở San Diego, hiện nay làm việc cho Microsoft, bằng cách sử dụng các kĩ thuật hoàn toàn khác. Ông đã có thể phân loại được tất cả các đa tạp bốn chiều compac đơn liên. Freedman làm việc trong vòng tám năm để đạt được kết quả này của ông. Rob Kirby, của Đại học Berkeley, đã nhận xét trong tạp chí *Science*, "Tôi nghĩ đây là một trong những công trình toán học đáng yêu nhất mà tôi đã từng thấy. Nó chứa đựng một yếu tố độc đáo. Nếu Freedman

[224] Điểm tới hạn của một hàm số là điểm mà tại đó mọi đạo hàm của nó đều bằng không.

không giải quyết được nó, tôi nghĩ rằng sẽ không ai làm được việc đó trong một thời gian dài." Khi kĩ thuật tính toán của Freedman được kết hợp với công trình cũng rất tuyệt vời của Simon Donaldson từ Oxford, người đang khảo sát một số phương trình nhất định bắt nguồn từ các dạng vật lí tồn tại trên tất cả đa tạp bốn chiều, và một số các kết quả khác thậm chí tuyệt vời hơn theo sau ra đời. Hóa ra là, có một số lượng vô hạn các cấu trúc khả vi không tương đương nhau trên không gian bậc bốn! Nói cách khác, có vô số các cách khác nhau để tính toán vi-tích phân trong không gian bậc bốn. Điều này trái ngược với tất cả các không gian có số chiều khác bốn: đối với số chiều bất kì nào khác bốn, chỉ có một cấu trúc khả vi trên không gian có tính chất của một không gian Euclid của số chiều đó (có nghĩa là, trong không gian của bộ-*n* số thực, *n* là số nguyên dương bất kì khác bốn).

Giữa thập niên sáu mươi, các hình cầu có cấu trúc khả vi không tiêu chuẩn, hay còn được gọi là các "hình cầu kì lạ" của Milnor, được khám phá chỉ xuất hiện ở gần điểm kì dị của các tập hợp xác định bởi các phương trình cực kì đơn giản. Điểm kì dị là các điểm tại đó mọi đạo hàm (nghĩa là tốc độ thay đổi) bằng không, đã từ lâu thu hút sự chú ý của các nhà toán học. Hoàn toàn bị bất ngờ, các nhà toán học từ hầu hết mọi quốc gia ở châu Âu, Việt Nam, Ấn Độ, Úc, Canada, Brazil, Liên Xô, và Mĩ bắt đầu dùng các kĩ thuật phát triển từ topo vi phân và topo đại số để nghiên cứu các nghiệm của các loại phương trình khác nhau. Milnor viết thêm một số kết quả áp dụng cho các đa thức, và bổ sung nhiều hơn nữa, trong một cuốn

sách ngắn, cực kì tao nhã, và đã trở thành kinh điển chỉ sau một thời gian ngắn.[225] Thom áp dụng topo học để nghiên cứu sự thay đổi trong các quá trình sinh học.[226] Các nhà hóa học, vật lí học cũng bắt đầu áp dụng ngành topo học vào nghiên cứu các khuyết tật của tinh thể và các hiện tượng khác. Trong những năm 1980, topo học xuất hiện với tần suất ngày một tăng trong các lí thuyết nhằm liên kết cơ học lượng tử và thuyết tương đối rộng.

PHỎNG ĐOÁN POINCARÉ TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

Phi lí thay, bất chấp sự bùng nổ của các khám phá toán học, người ta vẫn chưa tìm được lời giải đáp cho phỏng đoán nguyên bản của Poincaré. Các đa tạp có số chiều lớn hơn ba từng có vẻ bí hiểm. Đến năm 1982, người ta đã biết rằng bất kì đa tạp lớn hơn ba chiều nào chia sẻ một vài đặc trưng chung với một hình cầu thực ra cũng là một hình cầu. Nhưng, hãy bỏ qua những thứ lớn hơn ba chiều đó. Vậy còn ba chiều thì sao? Vũ trụ là một đa tạp ba chiều. Chúng ta đang sống trong đó. Nếu mọi vòng lặp trong nó đều có thể được co rút thành một điểm, liệu nó có phải là hình cầu không?

Thật khó có thể nghĩ ra được một câu hỏi nào khác đơn giản hơn về vũ trụ. Không giống như những khám

---

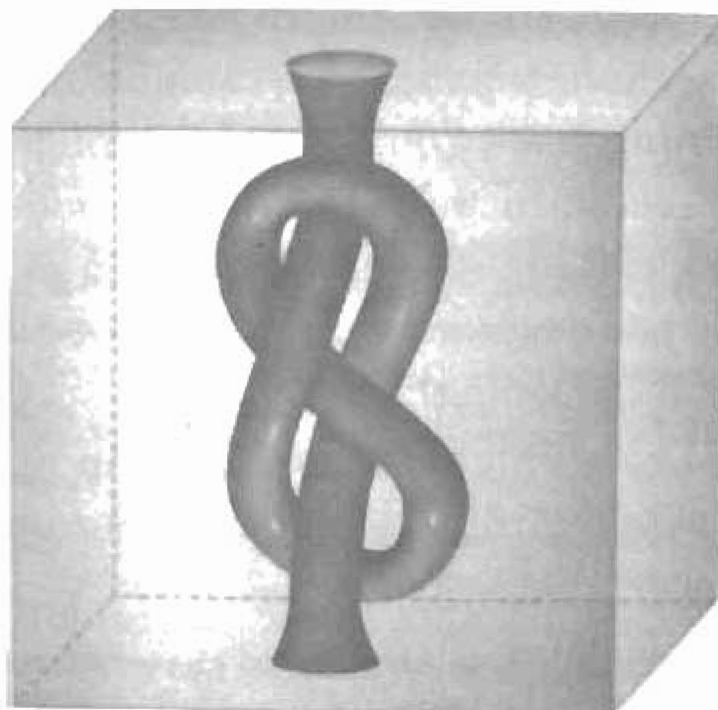
[225] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces* (Princeton: Princeton University Press, 1968).

[226] R. Thom, *Mathematical Models of Morphogenesis*, bản dịch tiếng Anh của W. M. Brookes (New York: Halsted Press, 1983).

phá mới về đa tạp nhiều chiều hơn, nó không đòi hỏi một hệ thống kĩ năng toán học phức tạp để hiểu. Thậm chí từ góc độ tâm lí, tình hình còn tồi tệ hơn, bởi vì có một số phương pháp tiếp cận giả thuyết Poincaré có sức hấp dẫn và tỏ ra hết sức hứa hẹn.[227] Cho đến những năm 1960, đã

---

[227] Ví dụ, một phiên bản nâng cao của phương pháp Dehn đề nghị xem xét một hình khối có lỗ thắt nút. Phần ngoài của lỗ thắt nút này trong không gian ba chiều là một hình xuyến đặc. Bạn có thể dán hình xuyến này lại theo một cách khác để có một đa tạp ba chiều đơn liên, nhưng không phải là khối cầu bậc ba. Bạn cũng có thể viết ra được một biểu diễn của nhóm cơ bản, và sau đó cố gắng chỉ ra rằng mọi thứ sẽ triệt tiêu, chỉ còn lại phần tử đơn bị. Tính toán này cực kì phức tạp nhưng nếu làm được, nó sẽ chỉ ra sự thông minh mà bạn may mắn sở hữu. Một khi mọi thứ triệt tiêu, bằng cách nào đó bạn có thể chỉ ra đa tạp này không đồng phôi với khối cầu bậc ba: có thể, bất kì hàm số nào trên đó nhất thiết phải có nhiều hơn hai điểm tới hạn. Bài toán dạng này sẽ làm bạn mất ăn, mất ngủ.



Hình i: Hình khối có lỗ thắt nút.

có một số nhà toán học bỏ ra hai mươi năm hoặc lâu hơn thế để nghiên cứu giả thuyết Poincaré. Họ đã chứng minh được nhiều điều, nhưng tuyệt nhiên không ai có thể chứng minh được giả thuyết này là đúng hay sai.

Điều này không có nghĩa là không có tiến triển gì. Ralph Fox, thầy hướng dẫn của Milnor, và là một trong những nhà nghiên cứu về lí thuyết thắt nút hàng đầu thời đó đã mời nhà toán học lúc đó còn chưa nổi danh Christos Papakyriakopoulos (1914-1976) đến Princeton. Papa, như mọi người thường gọi, sinh ra ở Athens khi Thế chiến 1 nổ ra, nhận bằng tiến sĩ từ Đại học Athens năm 1943.[228] Ông tham gia nhóm du kích chống lại sự chiếm đóng của Đức Quốc xã vào năm 1944, dạy tiểu học khi ẩn náu ở nông thôn, và buộc phải ra đi vào năm 1946 khi nội chiến xảy ra. Trong thời gian đó, Papa vẫn tiếp tục nghiên cứu topo học ít chiều. Ông gửi cho Fox một chứng minh đầy tham vọng cho bổ đề Dehn, kết quả mà Dehn tưởng là đã chứng minh được vào năm 1910, nhưng mười chín năm sau, vào năm 1929, bị phát hiện là có lỗ hổng. Cả Dehn, người đã trốn thoát khỏi Đức trong đường tơ kẽ tóc trên đường sắt liên-Siberia,[229] lẫn những người khác

---

[228] Luận án được Constantine Caratheodory đề ra nhằm tìm một cách chứng minh khác cho bất biến của các nhóm đồng điều ở phức đơn hình, một kết quả đã được chứng minh đầu tiên bởi Alexander.

[229] Dehn đến Mĩ năm 1940 nhưng gặp khó khăn trong việc tìm một vị trí giảng dạy. Ông dạy ở Đại học Idaho, Viện Công nghệ Illinois và Đại học St. John trước khi trụ lại ở Đại học Black Mountain, một học viện thực nghiệm trên dãy núi bang Bắc Carolina, cực kì nổi

cũng chưa thể sửa chữa được sai sót đó. Fox tìm ra một lỗi trong chứng minh của Papa, nhưng vẫn rất ấn tượng. Nhờ Fox thúc giục, Papa đến Princeton vào năm 1948 và không bao giờ trở về Hi Lạp ngoại trừ một thời gian rất ngắn khi cha ông mất năm 1952. Cơ quan an ninh Hi Lạp truy đuổi ông đến tận Mĩ, cố gắng thuyết phục cơ quan nhập cảnh Mĩ trục xuất ông. Nhờ Princeton ủng hộ, ông có được một phụ cấp nhỏ và một văn phòng để làm việc.

Sự đài ngộ của Princeton được đền đáp xứng đáng. Papa chứng minh một kết quả quan trọng gọi là *định lí vòng lặp* vào năm 1957, theo sau là chứng minh cực kì khéo léo (và chính xác) cho bổ đề Dehn.[236] Papa đã sử dụng một cấu trúc mới, nay được biết đến với tên gọi là *cấu trúc tháp*, gỡ bỏ những khó khăn trước đó một cách tài tình. Những nghiên cứu sinh tại Princeton vào thời gian này đã đùa giỡn bằng cách viết những khổ thơ hài hước 5 câu về các nhà toán học trong khoa. Milnor là người viết bài về Papakyriakopoulos:

Bổ đề phản bội của Dehn
Là tai ương của những nhà topo học
Cho đến thời Christos Papa
Kyriako
Poulos chứng minh nó không một khó khăn.

---

tiếng về nghệ thuật. Ở đây, ông trở thành một giảng viên được yêu mến, và mất năm 1952 - bốn năm trước khi trường đóng cửa

[236] Xem bài tổng kết C. D. Papakyriakopoulos, "Some Problems on 3-Dimensional Manifolds", *Bulletin of the American Mathematical Society* 64 (1958): 317-35.

Dòng cuối cùng đề cập đến cấu trúc tháp của Papa.

Cuối thập kỉ 1950, dường như tất cả các nhà topo học đều nhắm vào giả thuyết Poincaré, quyết tâm chinh phục nó. Rudolph H. Bing, được đào tạo bởi trường phái topo học mạnh ở miền Trung-Tây Mĩ, trường phái được tạo lập bởi Robert Lee Moore, sinh viên của E. H. Moore (và của Veblen), đến Viện Nghiên cứu Cấp cao vào năm học 1957. Ông nghiên cứu những trường hợp tương tự với phép phân tích của Dehn, theo đó, ta tạo ra các đa tạp bậc ba bằng cách nối các khối hình xuyến rắn thành các hình khối có lỗ thắt nút. Người ta đã từng tin rằng, trong số các đa tạp tạo thành đó, một số có thể cung cấp các phản ví dụ cho giả thuyết Poincaré. Bing không hoàn toàn loại trừ khả năng này, nhưng ông chỉ ra một số các lớp của các nút thắt không thể tạo ra các phản ví dụ. Tuy nhiên, ông gần như rút lại bài báo này, bởi trong viện có những lời đồn rằng giả thuyết này sai. Người ta truyền tay nhau hai chứng minh đầy tham vọng. Nhưng cả hai đều mắc những lỗi không thể sửa chữa. Một được phát triển bởi một nhà toán học người Nhật, được in ấn vào năm 1958 nhưng không qua được hội đồng công nhận.[231] Tỉ số là giả thuyết Poincaré 5, các nhà toán học 0.

Papa dùng mọi cố gắng để chứng minh phỏng đoán là đúng, công bố một vài kết quả thành phần vào năm

---

[231] R. H. Bing, "Necessary and Sufficient Conditions that a 3-Manifold be S^3", *Annals of Mathematics* 68 (1958) 17-37. K. Koseki, "Poincarésche Vermutung in Topologie", *Mathematics Journal of Okayama University* 8 (1958): 1-106.

1963.[232] Cho đến khi qua đời vào năm 1976, ông đã sống một cuộc đời khổ hạnh, luôn đến văn phòng sớm và về sau 5 giờ chiều. Ông chỉ nghỉ vào buổi ăn trưa hay các buổi trà, thời điểm mà ông lướt qua tạp chí *New York Times* hoặc tham gia một vài buổi xê-mi-na. Nhưng cuối cùng giả thuyết vẫn đánh bại ông. Tỉ số là, giả thuyết Poincaré 6, các nhà toán học 0.

Cuộc đời Papa được tiểu thuyết hóa trong cuốn *Bác Petros và phỏng đoán Goldbach* của Apostolos Doxiadis.[233] Trong đó, Petros Papachristos, bị ám ảnh bởi một bài toán nổi tiếng (Phỏng đoán Goldbach, nay vẫn chưa được chứng minh. Bài toán nói rằng mọi số chẵn là tổng của hai số nguyên tố, cách trình bày này dễ hiểu hơn nhiều so với giả thuyết Poincaré.). Sau một khởi đầu đầy hứa hẹn trên con đường sự nghiệp, Petros bỏ qua tất cả mọi mối quan hệ nhân sinh để toàn tâm toàn ý dành sức lực cho bài toán. Rốt cuộc, ông từ bỏ công việc học thuật của mình để trở về Hi Lạp, nơi mà các anh em của ông không bao giờ tha thứ cho ông vì đã làng phí trí tuệ. Ông qua đời, tự xem mình là một kẻ chiến bại vì không tìm được đáp án.

Giả thuyết Poincaré thực sự là tác nhân gieo giắc nỗi đau. Cho tới tận năm 1960, điều rõ ràng duy nhất về nó là không một ai có bất kì ý tưởng gì về việc nó có đúng hay

---

[232] C. D. Papakyriakopoulos, "A Reduction of the Poincaré Conjecture to Group Theoretic Conjectures", *Annals of Mathematics* 77 (1963): 250-305.

[233] A. Doxiadis, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* (New York, London: Bloomsbury, 1992, 2000).

không. Tại một hội thảo ở Georgia năm 1961, Fox viết một bài báo đề xuất một phương pháp tìm phản ví dụ khác. Còn Bing viết một bài khảo sát chi tiết rất cẩn thận vào năm 1964, gợi ý thêm những cách tiếp cận khác nữa.[234] John Stallings thì viết một bài báo về việc làm thế nào để không phải chứng minh nó.[235]

Các tiến bộ trong không gian nhiều chiều, nếu có, chỉ càng làm tăng thêm sự mạo hiểm khi đặt cược vào giả thuyết Poincaré cổ điển. Tuy nhiên, chúng cũng đều chỉ sai đường. Mặc dù sự thật về phỏng đoán này vẫn còn rất mơ hồ, những năm 1980, rất nhiều ý kiến cho rằng giả thuyết Poincaré là một câu hỏi thuần túy topo học. Hầu như không ai còn mơ tưởng rằng hình học có bất cứ mối liên hệ gì với nó.

THURSTON

Tuy nhiên, những năm 1970 đã chứng kiến sự tái sinh của hình học, phần lớn nhờ bàn tay của một cá nhân duy

---

[234] R. H. Fox, "Construction of Simply Connected 3-Manifolds", trong M. K. Fort, ed., *Topology of 3-Manifolds and Related Topics* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1962), 213-16. R. H. Bing, "Some Aspects of the Topology of 3-Manifolds Related to the Poincaré Conjecture" trong *Lectures on Modern Mathematics* II, ed. T. L. Saaty (New York: Wiley, 1964), 93-128.

[235] J. R. Stallings, "How not to prove the Poincaré Conjecture", in *Topology Seminar Wisconsin, Annals of Mathematics Studies* 60 (1966): 83-88. Bài báo đồng thời tồn tại trên trang web của ông (http://math.berkeley.edu/~stall).

nhất, Bill Thurston. Thurston nhận bằng cử nhân từ một trường khá ngược đời ở Sarasota New College năm 1967, và bằng tiến sĩ từ Berkeley vào năm 1972 dưới sự hướng dẫn của Morris Hirsch và Stephen Smale. Sau một năm tại Viện Nghiên cứu Cấp cao và một năm làm trợ lí giáo sư tại MIT, ông được chỉ định làm giáo sư tại Princeton năm 1974.

Hình học vi phân đã nở rộ trong thế kỉ 20, một phần nhờ kết quả của sự liên hệ với thuyết tương đối rộng. Nhưng hình học theo các cách hiểu của Klein, Poincaré và Hilbert không có tình trạng tốt đến vậy. Thurston thay đổi tất cả điều này. Ông có sức suy tưởng hình học phong phú nhất và độc đáo nhất sau Riemann. Thurston đã tưởng tượng về câu hỏi thế nào là sống trong một đa tạp ba chiều. Chúng ta sẽ thấy gì khi ở trong một khối hình xuyến bậc ba cùng với một số đối tượng khác trong đó? Kích thước của nó có mối liên hệ như thế nào đến vật chất của chúng ta? Tốc độ của ánh sáng có mối liên hệ như thế nào với kích thước của đa tạp đó? Chúng ta sẽ thấy gì nếu ai đó đi ra xa khỏi chúng ta?

Đã không một ai tưởng tượng được bất cứ điều gì giống như sự kết tinh của trí tưởng tượng mà Klein và Poincaré đã có - khi hai ông đua tài ở không gian hai chiều - lại có thể là khả dĩ trong không gian ba chiều. Mọi bề mặt đều có một dạng hình học tự nhiên duy nhất đã là một điều kì diệu, và mọi thứ hỗn độn tới mức khó có thể hi vọng một việc tương tự tái hiện trong không gian ba chiều. Có quá nhiều đa tạp ba chiều, và hình mẫu duy nhất có lẽ là không có hình mẫu tổng quát. Thật khó mà

biết phải bắt đầu từ đâu. Cố nhiên là vẫn tồn tại ba loại hình học trong không gian hai chiều và các không gian mẫu mang tính đơn liên, nơi mà các loại hình học này tồn tại. Métric thường gặp trong không gian bậc ba thông thường đem lại cho nó dạng hình học mang tính phẳng của không gian ba chiều Euclid. Khối cầu bậc ba có dạng hình học khối cầu đã được mô tả bởi Riemann. Phần bên trong của quả cầu đơn vị trong không gian ba chiều có một dạng hình học hyperbolic tự nhiên mà Poincaré miêu tả trong đoạn được trích dẫn ở Chương 10. Dehn và một số nhà topo học người Đức khác nhận ra rằng một số đa tạp bậc ba compac mang một dạng hình học hyperbolic, và các đa tạp khác được biết là mang dạng hình học khối cầu và dạng hình học phẳng. Nhưng các dạng hình học trên các đa tạp có vẻ có số lượng ít, và phần nào điều này gây sự tò mò.

Thurston tự hỏi, đối với chúng ta, thế nào là một dạng hình học đặc biệt đẹp. Trong không gian hai chiều, một số các định nghĩa khác nhau trùng lặp. Độ cong không đổi là điều tương tự với việc có cùng một quy luật để đo độ dài và góc tại mọi điểm và theo mọi hướng. Trong không gian ba chiều, có một số định nghĩa khả dĩ, và không phải tất cả chúng đều nhất quán với nhau. Không chút nản lòng, Thurston đã đưa ra một định nghĩa bây giờ được chấp nhận rộng rãi mang tính tạm thời, qua đó chỉ ra rằng, có tám và chỉ tám dạng hình học khác nhau trong không gian ba chiều; trái lại, chỉ có ba dạng trong không gian hai chiều. Ngoài các dạng hình học khối cầu, phẳng, và hyperbolic, một số dạng

hình học lai tạp khác tồn tại trên các không gian rất đặc biệt.[236]

Khi còn là sinh viên, Thurston đã dành nhiều thời giờ suy nghĩ về các ví dụ của các đa tạp, và các dạng hình học trên chúng. Trong luận án tiến sĩ, ông đã nghiên cứu các phương pháp phân tách đa tạp bậc ba thành những tấm mỏng chồng lên nhau và quấn quanh nhau theo những cách phức tạp.

Việc nói về tất cả các đa tạp ba chiều có một dạng hình học tự nhiên thậm chí dường như là vô vọng. Thật dễ để xây dựng phản ví dụ chỉ ra rằng những điều ngây thơ mà người ta hi vọng vào đều sai cả. Tuy nhiên, Thurston phỏng đoán rằng bất kì đa tạp ba chiều nào cũng đều có thể được cắt nhỏ thành từng miếng, bằng cách cắt dọc theo các mặt cầu và bề mặt hình xuyến hai chiều một cách độc đáo và tự nhiên mà mỗi miếng tạo thành sẽ mang một trong tám dạng hình học. Ông đã có thể chỉ ra rằng giả thuyết của ông đúng cho một lớp rất rộng lớn của các đa tạp bậc ba. *Phỏng đoán hình học hóa* (geometrization conjecture), như cách mà ông gọi, cũng ám chỉ đến giả thuyết Poincaré.[237]

---

[236] Nếu bạn có hai đa tạp M và N, tích của M và N, ký hiệu là MxN, là một tập hợp của các cặp có *(a,b)* thành phần, trong đó *a* nằm trong M và *b* trong N. MxN là một đa tạp. Dễ thấy rằng tích của một mặt cầu hai chiều và một hình tròn là phẳng trong một chiều và cong trong hai chiều kia. Hầu hết các dạng hình học bổ sung của Thurston nằm trong các tích, hay không gian có thể trở thành tích nếu bạn cắt bỏ một bề mặt từ đa tạp.

[237] Ta có thể chỉ ra rằng, bất kì đa tạp ba chiều đơn liên nào với dạng hình học hình cầu là đồng phôi với khối cầu bậc ba. Điều này không khó (xem thêm, ví dụ như sách của Thurston hoặc Weeks).

Phong đoán hình học hóa đặt ra một tầm nhìn sâu rộng về các đa tạp ba chiều, nhưng dường như có vẻ quá lớn và xa ngoài tầm với. Tuy nhiên, Thurston đã có thể chứng minh rằng, hầu hết (theo một nghĩa thích hợp của từ này) các đa tạp bậc ba mang một cấu trúc hyperbolic. Điều này hoàn toàn là một ngạc nhiên. Tuyên bố tương tự cũng đúng đối với các đa tạp bậc hai: ngoại trừ mặt cầu và mặt hình xuyến, tất cả đa tạp bậc hai (định hướng được) đều có một dạng hình học hyperbolic. Klein và Poincaré đều đã biết điều này, nhưng kết quả này thường không được diễn giải theo cách tương tự. Đương nhiên, không ai nghi ngờ bất cứ điều gì giống như vậy có thể đúng đối với các đa tạp bậc ba.

Các ứng dụng xuất hiện ngay sau đó và lạ thú vị. Ví dụ, một trong những hệ quả là khẳng định rằng, khu vực nằm bên ngoài hầu hết các nút thắt (được gọi là các *phần bù của nút thắt*) trong không gian ba chiều mang một mêtric khiến nó trở thành một đa tạp có dạng hình học hyperbolic. Mặc dù các nút thắt này là vô cùng xa so với điểm nhìn của một người quan sát sống trong đa tạp đó, thể tích của khu vực đó hóa ra là hữu hạn và đưa ra một con số mới gắn liền với nút thắt. Kì bí thay, những thể tích đó dường như liên hệ với lí thuyết số theo một cách chưa giải thích được.

Trước công trình của Thurston, lí do duy nhất để nghĩ rằng giả thuyết Poincaré có thể đúng là vì không ai có thể nghĩ ra một phản ví dụ. Tệ hơn, khi ai đó cố gắng xây dựng phản ví dụ một cách có hệ thống, thì người đó thường có cảm giác rằng, chẳng có lí do chính đáng nào

cho việc chúng không thể tồn tại. Điều này hoàn toàn điên rồ. Sau Thurston, có thêm một lí do nữa để giả thuyết Poincaré có thể đúng. Có lẽ mọi đa tạp bậc ba đều được xây dựng dựa trên các mảnh nhỏ có một cấu trúc hình học.

Giống như Thom năm 1958, Milnor năm 1962, và Smale năm 1966, Thurston được trao Huy chương Fields. Đây là giải thưởng cao quý nhất mà một nhà toán học có thể nhận được. Nó được thiết lập bởi nhà toán học người Canada, John Charles Fields (1863-1932). Ông đã làm việc không vì bản thân để thay mặt cho cộng đồng toán học quốc tế, vượt qua sự đe dọa tẩy chay của các nhà toán học Pháp nếu như người Đức được mời đến đại hội năm 1924. Ông để lại một phần đáng kể tài sản của mình tài trợ cho giải thưởng được thiết lập sau khi ông mất, vượt qua sự phản đối mạnh mẽ của Veblen, người cho rằng bản thân nghiệp nghiên cứu đã là một giải thưởng. Giải đầu tiên được trao vào năm 1936. Di chúc của Fields quy định rõ ràng, giải thưởng phải được trao để khuyến khích các nhà toán học trẻ. Theo truyền thống, điều này có nghĩa là giải chỉ có thể được trao cho các cá nhân trẻ hơn bốn mươi tuổi tính đến đầu năm trao giải, và đại hội bốn năm một lần diễn ra. Thế chiến II làm gián đoạn Đại hội Toán học, nhưng kể từ 1950, giải thưởng được trao đều đặn bốn năm một lần tại Đại hội Quốc tế. Chiến tranh lạnh làm đại hội được dự kiến vào năm 1982 phải dời đến năm 1983, ở đó Thurston đón nhận huy chương. Bởi giới hạn tuổi tác, đại hội này là năm cuối cùng mà Thurston có thể nhận được giải thưởng.

Giải thưởng dành cho Thurston làm một số người nhíu mày tại thời điểm đó. Ông là nhà toán học có tài diễn thuyết. Thật không công bằng khi cho rằng ông không xuất bản đủ số lượng như một số người nhận xét. Công trình mà ông nhận Huy chương Fields về sự phân thớ (foliation) chắc chắn là một công trình hoàn hảo, và được ấn bản hết sức cẩn thận. Tuy nhiên, ông xuất bản rất ít các công trình mang tính hình học một cách thuần túy. Chỉ có một bài báo duy nhất trong *Bulletin of American Mathematical Society*, và một tập giáo án tại Princeton được truyền từ máy photocopy này đến máy photocopy khác, hiện nay đã có sẵn trên trang web. Các chương đầu tiên của tập giáo án được viết lại cẩn thận bởi vài nhóm các nhà toán học, và được in thành một cuốn sách có sức ảnh hưởng, hiệu đính bởi Silvio Levy.[238] Mặc dù Thurston viết ít, các sinh viên và những người cộng tác của ông công bố số lượng khổng lồ.

Thurston quan tâm đến tính xã hội đặc biệt của cộng đồng toán học nhiều hơn hầu hết các nhà toán học khác. Ông viết về những hội tiệc khi vô tình làm ngừng trệ hơn một thập kỉ nghiên cứu sự phân thớ của các đa tạp. Các

---

[238] W. P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, vol 1, edited by S. Levy (Princeton: Princeton University Press, 1997). Tập giáo án tại Princeton (W. P. Thurston, "The Geometry and Topology of Three-Manifolds") nằm trên trang Web, của Viện Nghiên cứu Khoa học Toán tại Berkeley: www.msri.org/publications/books/gt3mf. Cả cuốn sách và tập giáo án đều tuyệt vời.

nhà toán học khác ít thành tựu hơn ông, nhận ra khả năng của ông, giả định rằng ông sẽ làm sáng tỏ những vấn đề chính, và do đó từ bỏ lĩnh vực này. Họ tìm các lĩnh vực khác để chứng tỏ bản thân. Thay vì thúc đẩy việc nghiên cứu phần thơ, Thurston lo lắng rằng ông vô tình làm nó ngừng trệ.

Mặt khác, ảnh hưởng của ông trong hình học thật phi thường. Sẽ là bình thường nếu ta đề cập đến các nhà hình học hay topo học đã thay đổi toàn bộ cách tư duy của họ về một tập hợp các vấn đề sau khi trò chuyện với Thurston. Những ý tưởng của ông đã hoàn toàn cách mạng hóa tư duy của chúng ta về các đa tạp bậc ba, mà ngay cả những người chưa bao giờ gặp ông cũng thường xuyên sử dụng các khái niệm và ví dụ mà ông là người khởi xướng. Các nhà toán học khai thác mạnh mẽ các ý tưởng hình học, đến nỗi khiến cho lĩnh vực topo học của các đa tạp bậc ba xuất hiện một số lượng lớn - từ trước tới nay chưa từng nhiều như thế - các nhà nghiên cứu trẻ đem các phương pháp hình học vào các bài toán topo và đại số.

Thurston đã đóng góp cho nền toán học, cho việc dạy học, cho phương pháp tư duy dạy và học toán nhiều hơn bất cứ nhà toán học nào có cùng trình độ với ông, có cùng độ tuổi tương đối trẻ như ông. Bài báo gây ảnh hưởng của ông về tri thức toán học đã đem lại nhiều quan sát sâu sắc và đặt ra nhiều câu hỏi thú vị hơn bất kì một bài báo nào khác có độ dài tương đương về giáo dục toán

học.[239] Quan điểm của Thurston, mặt khác, gây ra một cuộc tranh luận rất sôi nổi trong cộng đồng toán học về chứng minh và trực giác.[240] Những cuộc tranh luận này có thể là cột mốc đánh dấu sự kết thúc thế kỉ hiện tượng, đồng thời gợi nhớ lại cuộc trao đổi giữa Poincaré, Hilbert và những người khác một thế kỉ trước về bản chất của chứng minh và trực giác.

HAMILTON VÀ DÒNG CHẢY RICCI

Công trình của Thurston làm bùng lên sự hồi sinh mạnh mẽ của các công trình hình học. Các cấu trúc hình học theo phong cách của Thurston dường như xuất hiện ở khắp mọi nơi. Những bất biến của các đa tạp có dạng hình học hyperbolic bắt đầu đóng một vai trò quan trọng trong topo học và hình học đại số. Tuy nhiên, không một ai biết, làm thế nào để đạt được sự tiến triển xa hơn trong phỏng đoán hình học hóa của Thurston. Một số phương pháp được đề xuất, nhưng các trở ngại cũng ngoài sức tưởng tượng.

Một vài ý tưởng hứa hẹn đến từ giải tích. Vào đầu thập kỉ 1980, một số người bắt đầu nghiên cứu liệu điều gì

---

[239] W. P. Thurston, "Mathematical Education", *Notices of the American Mathematical Society* 37 (1990): 844-50

[240] Xem A. Jaffe and F. Quinn, "Theoretical Mathematics: Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics", *Bulletin of the American Mathematical Society* 29 (1993): 1-13, and W. P. Thurston, "On Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society* 30 (1994): 161-77.

sẽ xảy ra khi ta lấy một đa tạp với một mêtric Riemann và cố gắng cải thiện nó bằng một số quá trình làm trơn các cực điểm của độ cong. Ví dụ, nếu độ cong lớn ở một điểm cụ thể theo một hướng cụ thể, ta có thể cố gắng làm giảm bớt nó theo hướng đó, và tương tự nếu nó có vẻ thấp, người ta có thể cố gắng để làm tăng nó. Với sự may mắn, ta có thể biến dạng những vật thể xung quanh để độ cong theo mọi hướng tại điểm đó và các điểm lân cận nó trở nên giống nhau. Nếu may mắn hơn nữa, có lẽ toàn bộ các khu vực của đa tạp đang được xem xét có thể khai triển thành một trong những dạng hình học của Thurston, và người ta có thể tìm thấy một phương pháp riêng, thông qua đó thiết lập phỏng đoán hình học hóa trên đa tạp đó. Khó khăn là, làm sao có thể tìm được một phương pháp có thể kiểm soát một cách giải tích để xác lập nền tảng cho ý tưởng này.

Đầu thập kỉ 1980, Richard Hamilton đề xuất một cách tư duy một đa tạp có một mêtric Riemann như thể nó được làm bằng kim loại, nói cách khác, có nhiệt độ biến đổi. Điều gì sẽ xảy ra, nếu chúng ta để một dòng chảy cong từ khu vực có độ cong lớn hơn xuống vùng có độ cong thấp hơn, giống như luồng nhiệt từ nơi ấm đến các nơi lạnh hơn? Điều này dẫn đến việc thay đổi các mêtric trong một không gian sao cho các khoảng cách giảm một cách nhanh nhất dọc theo các hướng mà theo chúng độ cong là lớn nhất.[241]

[241] Có nhiều cách khác nhau để diễn giải cách mô tả này thành tập hợp các phương trình. Hamilton xem xét tensor độ cong Ricci (Ricci



Hình 50. Richard Hamilton.

Để tính toán quy luật mô tả sự lưu chuyển của các luồng nhiệt từ các vùng ấm hơn tới các vùng lạnh hơn, ta có thể chỉ rõ rằng, nhiệt độ dịch chuyển về phía giá trị trung bình của các nhiệt độ ở lân cận một điểm trên một hình cầu nhỏ. Toán tử để tính các giá trị trung bình như vậy trên các hình cầu nhỏ được gọi là *Laplacian*. *Phương trình nhiệt* biểu diễn cụ thể tỉ lệ thay đổi của nhiệt độ theo thời gian, nó tỉ lệ thuận với đối số của Laplacian (Một

curvature tensor), là một công cụ ta có được khi lấy trung bình một vài mảnh nhất định của tensor độ cong Riemann. Bởi vì bạn có thể tính được tensor Riemann từ đạo hàm bậc một và bậc hai của tensor metric tensor g_{ij}, bạn có thể tính được tensor Ricci theo cùng cách như vậy. Dòng chảy Ricci được chi phối bởi phương trình $\partial g_{ij}/\partial t = -2R_{ij}$.

cách tình cờ, chính cùng một cơ chế tính toán đó, mà các phương trình của Black-Scholes ra đời, chúng mô tả quy luật định giá cho các lựa chọn trên thị trường tài chính.

Người ta muốn có được một điều gì đó tương tự với phương trình nhiệt cho độ cong. Để viết ra một phương trình có nghĩa, ở cả hai vế của phương trình đó phải là những đối tượng toán học có cùng thể loại. Đối với phương trình nhiệt, cả nhiệt độ lẫn tốc độ thay đổi của nó đều là những con số. Nhưng tốc độ thay đổi (đạo hàm theo thời gian) của một mêtric Riemann lại là một đối tượng toán học - đối tượng này gán cho mỗi mặt-phẳng-hướng tại mọi điểm một con số. Hơn nữa, nó phải độc lập với cách chọn các toạ độ, bởi vì mêtric của Riemann cũng có tính chất này. Còn nhớ, ở Chương 7, chúng ta đã thấy rằng độ cong của Riemann là một đối tượng như thế. Con số được gán cho mỗi mặt-phẳng-hướng phản ánh tổng các góc của các tam giác trắc địa nhỏ và tiếp xúc với mặt-phẳng-hướng đó chệch ra khỏi 180 độ như thế nào.

Vậy, ngoài ra, còn những đối tượng toán học nào khác nữa - gán một giá trị cho mỗi mặt-phẳng-hướng tại mỗi điểm - cũng độc lập với cách chọn hệ tọa độ? Về cơ bản, chỉ có hai. Một là *tensor Ricci*, được rút ra từ tensor của Riemann bằng cách tính trung bình các tổ hợp khác nhau của những độ cong theo các hướng khác nhau. Đối tượng kia là "độ cong vô hướng" (trung bình của các độ cong theo mọi hướng) nhân với tensor-độ-cong-Riemann. Vì thế, để có được một toán tử tương đương với phương trình nhiệt, về cơ bản, lựa chọn duy nhất là việc xác định rằng, đạo hàm theo thời gian của mêtric Riemann tại mỗi

điểm là tỉ lệ thuận với đối số của tensor Ricci. Đó chính là điều được gọi là *dòng chảy Ricci*. Hamilton đề nghị nghiên cứu cách thức mà các đa tạp biến đổi dưới sự chi phối của dòng chảy Ricci, như là một phương pháp để giải quyết phỏng đoán hình học hóa. Chính chúng là những phương trình mà Perelman đã viết lên trên bảng khi bắt đầu bài thuyết trình của anh tại MIT.

Các phương trình dòng chảy Ricci của Hamilton là một loại phương trình vi phân, được biết đến như là một phương trình vi phân từng phần. Phương trình vi phân từng phần là một phương trình trong đó ta chỉ rõ tỉ lệ thay đổi ở các điểm khác nhau của một đối tượng toán học chưa biết nào đó, và từ đó người ta tìm kiếm đối tượng đó như là một nghiệm. Những nghiệm của phương trình vi phân từng phần là các đối tượng có tỉ lệ thay đổi như mong muốn tại mọi điểm theo mọi hướng.

Hầu hết các phương trình trong ngành vật lí toán học là phương trình vi phân từng phần. Các phương trình Maxwell thống nhất điện trường và từ trường bằng cách thiết lập các phương trình vi phân từng phần mô tả điện trường, từ trường thay đổi và tương tác - như là một hàm số của các điểm và các hướng trong các trường đó - từ điểm này đến điểm khác như thế nào. Các phương trình của Einstein - liên kết vật chất, độ cong không gian, và trọng lực - là các phương trình vi phân từng phần. Những phương trình chi phối dòng chảy và dẫn nhiệt, và cả phương trình Schrödinger trong cơ học lượng tử cũng vậy. Phương trình vi phân từng phần có một tầm quan trọng to lớn đối với thực tiễn, và đã được nghiên cứu sâu

trong hơn một thế kỉ. Những nghiên cứu về chúng càng nhận được sự chú ý nhiều hơn trong Thế chiến II - sự phát triển của máy bay phản lực siêu âm đòi hỏi hiểu biết về cách thức mà các đáp án của các phương trình mô tả dòng chảy quanh cánh máy bay phụ thuộc vào hình dạng của cánh, tốc độ và hướng của dòng chảy xung quanh nó như thế nào. Để dự báo bão tốt hơn, người ta cũng yêu cầu các phương pháp tốt hơn để giải quyết những phương trình tương tự này.

Làm thế nào để giải, hoặc cố gắng giải một phương trình vi phân từng phần? Bước đầu tiên thường là nghĩ qua xem tập hợp của các đáp án khả dĩ sẽ là gì và xác định loại cấu trúc mà không gian của các đáp án. Sự thật rằng tập hợp các đáp án tiềm năng - trong trường hợp của chúng ta là tập hợp tất cả các mêtric trong một không gian - thực ra là một không gian vô số chiều không đem lại ngạc nhiên: tập hợp các hàm số trên trục số thực đã là một không gian vô số chiều, mà mỗi hàm số là một điểm của không gian đó. Tiếp theo đó, ta cố gắng diễn giải các phương trình vi phân từng phần như là việc cung cấp một dòng chảy trong không gian vô số chiều đó và cố gắng đi theo nó. Tuy nhiên, để làm giải tích trong các không gian như vậy, người ta phải làm hết sức thận trọng. Rất nhiều cạm bẫy tiềm ẩn trong đó. Có rất nhiều chỗ trống trong một không gian vô số chiều, và một quỹ đạo được quy định trước bởi phương trình vẫn dễ dàng dẫn ta đi ra khỏi không gian đó.

Điều này xảy ra khi chúng ta bắt đầu biến dạng một mêtric và kết thúc với một thứ không còn là mêtric nữa

các khoảng cách xac định bởi nó có thể mang giá trị không, hay âm, chúng có thể chạy ra xa vô cùng, hoặc chúng có thể không còn mang tính liên tục. Khi những điều bất thường như vậy xảy ra, chúng ta nói rằng các đáp án của phương trình này *phát triển các điểm kì dị*. Chúng ta cần thiết phải có khả năng tránh khỏi các điểm kì dị. Ngay cả với giả định rằng dòng chảy kết thúc ở nơi nào đó tốt đẹp, chúng ta cũng cần phải có khả năng theo dõi nó. Nhưng ngoại trừ trường hợp có thể giải phương trình đó một cách chính xác, điều mà dường như không bao giờ xảy ra, chúng ta chưa bao giờ có thể theo dõi dòng chảy một cách chính xác. Chúng ta chỉ có thể theo dõi nó một cách xấp xỉ. Vì vậy, chúng ta cần một số loại biên nào đó báo hiệu rằng chúng ta không có quá nhiều lỗi và con dường dang đi một cách tổng quát là đúng hướng. Những biên như vậy cũng cho phép chúng ta chỉnh sửa ơ giữa chừng. Ta cần có một tập hợp các biên khác để đảm bảo việc tránh xa các điểm kì dị. Các nhà giải tích gọi những thứ như vậy là *các ước lượng*. Các ước lượng báo hiệu cho chúng ta biết đang ở gần một thứ nào đó đang di chuyển, do đó có thể tiếp tục theo dõi nó. Các nhà giải tích yêu chúng. Còn hầu như những người khác thì khiếp sợ chúng. Xử lí các ước lượng đòi hỏi phải có kĩ năng tuyệt vời. Và xử lí chúng khi chúng ở gần các điểm kì dị đòi hỏi một trí tưởng tượng phong phú cũng như một kĩ năng tuyệt vời.

Kể từ thời Riemann - người đã có những đóng góp cơ bản đến lí thuyết dòng chảy chịu nén - các nhà hình học đã liên tục sử dụng phương trình vi phân từng phần để

nghiên cứu sự biến dạng của các cấu trúc hình học khác nhau. Trong một sự éo le kì lạ của số phận, dường như những phương trình vi phân từng phần thách thức nhất - những phương trình có độ khó vừa đủ vượt qua giới hạn mà người ta có thể giải được, nhưng không quá xa để người ta nghĩ đến sự vô vọng - lại là những phương trình đến từ hình học. Những năm 1970 đã chứng kiến một số thành công loé sáng chỉ ra rằng, nếu ta bắt đầu với một đa tạp mà độ cong của nó thỏa mãn một số các ràng buộc nhất định, ta có thể thay đổi một cách liên tục độ cong để làm nó đẹp hơn và kết thúc với các mètric đặc biệt mang tính đối xứng. Shing-Tung Yau, người đã nhận Huy chương Fields cùng với Thurston năm 1983 cho một trong những công trình của ông, đã chỉ ra rằng ta có thể tìm thấy các mêtric phẳng trên các không gian nhất định bằng cách làm biến dạng một mêtric ban đầu như việc sử dụng một phương trình vi phân từng phần. Năm 1981, trong một kiệt tác, Hamilton cho thấy nếu ta bắt đầu với một mêtric trong đó độ cong không bao giờ bằng không hay nhỏ hơn không, dòng chảy Ricci kết thúc với việc cho ra một độ cong dương không đổi.[242]

Kết quả của Hamilton làm chấn động dư luận. Tại một điểm mấu chốt, ông đã phải sử dụng *định lí hàm ngược Nash-Moser* ít tên tuổi mà Nash đã từng dùng để chứng minh rằng, bất kì đa tạp nào của Riemann cũng có thể nhúng vào được trong một không gian Euclid thích

---

[242] R. S. Hamilton, "Three-Manifolds with Positive Ricci Curvature", *Journal of Differential Geometry* 17 (1982): 255-306.

hợp có số chiều nhiều hơn. Lập luận của Hamilton được đơn giản hóa bởi Dennis DeTurck của Đại học Pennsylvania.[243] Năm 1986, Hamilton và Michael Gage, hiện nay thuộc Đại học Rochester, đã có thể chứng minh rằng một lập luận tương tự áp dụng cho các đường cong khép kín trên mặt phẳng thực sự dẫn đến việc đường cong trở thành một đường tròn.[244] Cho trước một đường cong trong mặt phẳng và một điểm trên đường cong, chúng ta có thể định nghĩa độ cong của đường cong tại điểm đó là nghịch đảo của bán kính đường tròn tiếp xúc tại điểm đó (Vòng tròn tiếp xúc tại một điểm trên một đường cong là vòng tròn tiếp tuyến có bậc tiếp xúc cao nhất với đường cong tại điểm đó.) Nếu tại mỗi điểm, đường cong phát triển theo hướng vuông góc với nó với một tốc độ tỉ lệ thuận với độ cong, thì Gage và Hamilton có thể chứng minh tiếp rằng, đường cong co lại và trở thành một vòng tròn sau đó. Nói cách khác, độ cong trải ra, và rồi trở thành không đổi.

---

[243] D. M. DeTurck, "Deforming Metrics in the Direction of Their Ricci Tensors", *Journal of Differential Geometry* 18 (1983): 157-62. Xem một tuyển tập hay về dòng chảy Ricci trong H.-D. Cao, B. Chow, S.-c. Chu, and S.-T. Yau, eds., *Collected Papers on the Ricci Flow* (Somerville: International Press, 2003). Một bản có chỉnh sửa bài báo của DeTurck cũng được in trong này.

[244] Trường hợp quan trọng xuất hiện trong M. Gage và R. S. Hamilton, "The Heat Equation Shrinking Convex Plane Curves", *Journal of Differential Geometry* 23 (1986): 69-96. M. Grayson, "The Heat Equation Shrinks Embedded Curves to Round Points", *Journal of Differential Geometry* 26 (1987): 285-314 chỉ ra rằng dòng chảy trong bài toán tạo thành bất kì mặt lồi cong đóng (nhúng), tại điểm đó kết quả của Gage-Hamilton có hiệu lực

Điều này là hợp lí nhưng còn ở xa sự rõ ràng. Và khi ta càng tư duy về nó, thì nó càng thể hiện ít rõ ràng hơn. Giả sử chúng ta bắt đầu với một đường cong như trong Hình 51. Các vùng có độ cong lớn nhất sẽ di chuyển nhanh nhất, nhưng điều này không hiển nhiên đến vậy, và trên thực tế, có vẻ như có thể là, một số phần của đường cong sẽ sụp đổ lên chính chúng. Kết quả của Gage và Hamilton đảm bảo rằng chúng sẽ không như vậy.

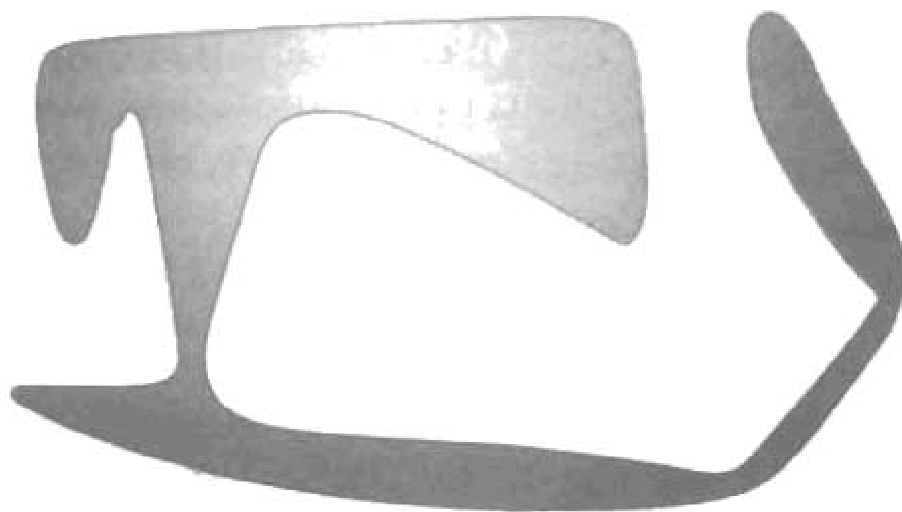
Vào đầu những năm 1990, Hamilton và các cộng sự của ông đã chỉ ra rằng nếu ta bắt đầu với một bề mặt hai chiều compac bất kì, và để cho độ cong phát triển theo dòng chảy Ricci, thì ta sẽ thu được một bề mặt có độ cong không đổi.[247] Độ cong trải ra cho đến khi nó trở thành không đổi. Điều này đưa đến một chứng minh trừu tượng đơn giản về mặt khái niệm của việc: bất kì đa tạp hai chiều nào cũng mang một dạng hình học duy nhất, kết quả mà Klein và Poincaré đã khổ công tìm kiếm.

Thật xui xẻo, Hamilton đã có thể chứng minh rằng, nói chung trong trường hợp của các đa tạp ba chiều, dòng chảy Ricci làm phát sinh các điểm kì dị. Nếu có những điểm trong đa tạp mà độ cong ở đó bằng không, dòng chảy Ricci sinh ra các điểm kì dị rất đáng sợ. Dường như không có cách nào để tránh né chúng. Tồi tệ hơn, có rất

---

[247] Kết quả này được thiết lập cho mọi trường hợp ngoại trừ mặt cầu hai chiều trong đó độ cong bằng không tại vài điểm trong R. S. Hamilton, "The Ricci Flow on Surfaces", *Contemporary Mathematics* 71 (1988): 237-61. Trường hợp loại trừ được thiết lập bởi B. Chow, "The Ricci Flow on the 2-Sphere", *Journal of Differential Geometry* 33 (1991): 325-34.

nhiều khả năng làm phát sinh các điểm kì dị, và trong khi một ai đó có thể tìm được các ước lượng ở gần một vài điểm trong số đó, có vẻ như không có cách nào nắm bắt tất cả chúng một cách tổng quát. Nhiều công trình vẫn tiếp tục được thực hiện với các kĩ thuật dựa vào dòng chảy Ricci, nhất là trong không gian nhiều chiều, và đó là một kĩ thuật quyền năng để nghiên cứu hình học Riemann. Nhưng dường như không có cách nào sử dụng nó để tiến gần đến phỏng đoán hình học hóa, và do đó đến giả thuyết Poincaré.



Hình 51. Nếu đường cong di chuyển tại mỗi điểm dọc theo đường vuông góc với đường cong, hướng về trung tâm của nó với một tốc độ bằng nghịch đảo của bán kính của đường tròn vừa vặn nhất với đường cong (đây chính là độ cong) thì đường cong sẽ co rút thành một điểm, ngày càng trở nên tròn hơn. Đây là định lí Gage-Hamilton.

CÁC NỖ LỰC KHÁC

Tất nhiên, điều này không có nghĩa các cuộc tấn công khác nhằm vào giả thuyết Poincaré ngừng lại. Cũng là hợp lí nếu một chứng minh có thể đến từ đại số thuần tuy. Dehn và Papakyriapoulos trước đó đã cung cấp các cách rút gọn về đại số, nhưng, vào đầu năm 1970, Joan Birman, của Đại học Barnard, phát biểu lại phỏng đoán này như một mệnh đề đại số thuần tuý mà ta phải tuân theo để phá vỡ nó.[340] Nhưng thật đáng tiếc, điều này chẳng đem lại được gì cả.

Đương nhiên, các nhà topo học chuyên về các không gian ít chiều tiếp tục nhìn nhận vấn đề này như là của riêng họ. Họ có thể sống cùng đại số. Có thể. Nhưng lại bị nghẹn với các công cụ hình học, và đặc biệt là phương trình vi phân từng phần, rất khó nuốt trôi. Năm 1986, Colin Rourke của Đại học Warwick và nghiên cứu sinh của ông, nhà toán học người Bồ Đào Nha Eduardo Rego tuyên bố một giải pháp cho giả thuyết Poincaré. Bất chấp việc gây ra phiền toái cho nhiều người trong cộng đồng toán học, Rourke đã lên báo chí trước khi hoàn tất quá trình bình duyệt. Tại một hội thảo ở Berkeley, một lỗ hổng trong chứng minh này được phát hiện. Rourke nhấn mạnh rằng sai sót đó có thể được sửa chữa, nhưng thực tiễn điều này là không thể, và chứng minh bị rút lại.

---

[340] J. Birman. "Poincaré's Conjecture and the Homotopy Group of a Closed, Orientable 2-Manifold", *Journal of the Australian Mathematical Society* 17 (1974): 214-21.

Tuy nhiên, như là kết quả cho công việc của họ, Rourke và Rego đã tìm thấy một thuật toán để xác định các đa tạp bậc ba được tạo thành khi ta dán hai khối hình xuyến rắn *n*-lỗ lại với nhau. Điều này giải quyết một trong những vấn đề đã khiến cho việc xác định một phản ví dụ khả dĩ cho giả thuyết Poincaré trở nên khó khăn. Trước đây, người ta có thể tìm thấy một ứng cử viên có khả năng, nhưng không thể nào chỉ rõ đa tạp tạo thành. Ít lâu sau, Hyam Rubinstein, của Đại học Melbourne, khám phá một thuật toán khác. Năm 1994, Abigail Thompson, của Đại học California ở Davis đã lấy một khái niệm mới được phát triển gọi là *vị trí mỏng* (thin position) và sử dụng nó để cách mạng hóa bài toán nhận biết khối cầu bậc ba bằng cách chứng minh, lí giải lại, và đem lại một dạng khác cho thuật toán Rubinstein. Rourke kết hợp thuật toán Rego-Rourke và thuật toán Rubinstein-Thompson, để viết một chương trình máy tính có thể được sử dụng để tìm kiếm phản ví dụ cho giả thuyết Poincaré. Mặc dù máy tính đã chạy nhanh hơn nhiều, họ vẫn mất rất nhiều thời gian khổ sở để kiểm tra một phản ví dụ tiềm năng. Ngoài ra, nếu không có phản ví dụ cho giả thuyết Poincaré, quá trình này sẽ không bao giờ kết thúc. Tuy nhiên, một vài nghiên cứu sinh vẫn cài đặt chương trình này và bắt đầu chạy nó.

Có một sự rúng động nho nhỏ vào năm 1995, khi Valentin Poénaru phác thảo một lập luận để chứng minh phỏng đoán, bằng cách thiết lập một kết quả bốn chiều, từ đó có thể suy ra giả thuyết Poincaré. Đáng buồn thay,

ông đã buộc phải rút lại một trong những kết quả mà ông đã dựa vào.

Và cuối cùng, người ta không thể chối bỏ các lập luận từ hình học vi phân. Cách tiếp cận của Hamilton thông qua dòng chảy Ricci vẫn còn là hứa hẹn, bất chấp những trở ngại dường như quá khó khăn về mặt kĩ thuật. Một cách tiếp cận khác của Michael Anderson, người đã tìm cách sử dụng một quy tắc, cũng được mô tả bởi một phương trình vi phân từng phần, để cho dòng chảy có *độ cong hoàn toàn vô hướng* (một số thu được tại mỗi điểm bằng cách lấy trung bình của các độ cong theo mọi hướng ở điểm đó) chảy từ các điểm có độ cong hoàn toàn vô hướng lớn hơn về các vùng có độ cong hoàn toàn vô hướng nhỏ hơn và ngược lại. Cũng như trong trường hợp của dòng chảy Ricci, ta gặp phải các điểm kì dị có vẻ quá phức tạp để phân tích.

Khi thế kỉ sắp kết thúc, giả thuyết Poincaré dường như càng nằm xa đáp án hơn bao giờ hết. Tỉ số thật thảm hại cho các nhà toán học: giả thuyết Poincaré 50, các nhà toán học 0.

Mặc dù việc không có dấu hiệu tiến triển làm người ta chán nản, những ý tưởng topo học của Poincaré đã chiếm lĩnh tất cả các lĩnh vực của toán học. Các mối liên hệ giữa topo học và vật lí, giữa topo học và khoa học máy tính, đã bắt đầu xuất hiện. Sự phát hiện ra những bất biến mới của thắt nút dẫn đến các bất biến chưa từng ngờ tới trước đây của các đa tạp ba và bốn chiều. Sự khởi đầu của một dạng hình học hoàn toàn khác gọi là *hình học đối ngẫu*, đã hiện ra trong bài báo bổ sung cuối cùng của

Poincaré, trở thành một lĩnh vực hoàn toàn độc lập. Khám phá của Poincaré về sự hỗn độn đã hoàn toàn đi vào tâm thức của giới toán học, và một trong những bài toán hàng đầu là, liệu các phương trình mô tả quy luật dòng chảy chất lỏng - đặc biệt là sự hình thành của các cơn bão - thực sự có những giai đoạn hỗn loạn hay không. Nhìn lại hơn một thế kỉ của các thành tựu mang tính bất ngờ, ta có thể nhận thấy rõ ảnh hưởng của Poincare ở khắp mọi nơi. Toán học chưa bao giờ đầy sức sống như vậy.

Nhưng cũng có những đám mây ở phía đường chân trời. Số lượng các cá nhân nghiên cứu các ngành toán học mũi nhọn bắt đầu giảm. Số lượng văn bằng cử nhân toán học ở Mĩ được trao vào năm 1990 ít hơn một nửa so với năm 1975, và còn giảm hơn nữa từ 1990 đến 2000. Sự suy giảm trầm trọng tương tự cũng được ghi nhận từ năm 1975 đến năm 2000 trong số lượng những người Mĩ cũng như người nước khác nhận bằng tiến sỹ. Sự suy giảm này trong toán học ở Liên Xô thậm chí còn rõ rệt hơn. Với sự sụp đổ của Liên Xô, cộng đồng toán học lớn nhất thế giới tan rã. Mặc dù toán học phát triển rực rỡ từ những năm 1960 đến những năm 1980, nhưng sự tiến triển lại lặp lại nhau vì một số kết quả chủ đạo của thế kỉ đã không được lưu trữ thật tốt. Chưa bao giờ tương lai của toán học lại rơi vào tình trạng nghiêm trọng đến như vậy.

14

Đáp án trong thiên niên kỉ mới

Các sử gia sẽ mất vài năm nữa mới có thể đạt được một khoảng cách đủ xa để bắt đầu đánh giá thế kỉ 20 một cách có ý nghĩa. Chưa từng có thế kỉ nào lại chứng kiến những vụ thảm sát hàng loạt... hay sự bùng nổ về tri thức lớn như vậy. Lịch sử biến động của thế kỉ vọng lại trong lịch trình của các kì Đại hội Toán học Quốc tế bốn năm một lần - hội nghị mà ở đó, nhà toán học từ tất cả các chuyên ngành và từ tất cả các vùng trên trái đất hội tụ lại: do Thế chiến II, không có đại hội nào được tổ chức từ năm 1936 đến năm 1950. Cũng không có đại hội nào đánh dấu thiên niên kỉ mới vào đúng năm 2000, bởi vì đại hội trước đó diễn ra vào năm 1998 tại Berlin và đại hội tiếp theo được tổ chức vào năm 2002 tại Bắc Kinh.

Tuy nhiên, vào ngày 24 tháng 5 năm 2000, một đám đông các nhà toán học tụ họp tại tòa nhà bề thế của Viện Hàn lâm Khoa học Paris. Hai nhà từ thiện người Mĩ Landon và Lavinia Clay đã cấp vốn xây dựng một học

viện mới dành riêng cho việc xúc tiến và phổ biến tri thức toán học. Nhóm cố vấn cao cấp của học viện đã quyết định rằng, cách thức tốt nhất để thực thi nhiệm vụ của Học viện Toán học Clay là chọn ra bảy bài toán đã từ lâu chưa giải quyết được và đề ra giải thưởng một triệu đôla cho mỗi đáp án.[247] Lo sợ các nhà toán học trẻ tuổi sẽ hướng đến các bài toán đơn giản hơn để tạo ra được một danh sách công bố khoa học dài, hội đồng này hi vọng giải thưởng bằng tiền như vậy sẽ khích lệ tinh thần dấn thân vào các bài toán phức tạp. Là một trong những cố vấn của học viện, Alain Connes, người đã nhận được Huy chương Fields giải thích, nhóm cố vấn tin rằng cuộc chiến đấu để vươn tới đỉnh cao có thể rất khốc liệt, nhưng tầm nhìn ở trên đỉnh là tuyệt đẹp và mang tính cách mạng khiến cho tất cả những điều tốt đẹp sẽ nối tiếp.[248]

Bảy bài toán được công bố trước các nhà toán học và công chúng tại một hội thảo đặc biệt của thiên niên kỉ. Sự chờ đợi dâng cao. Hội đồng - gồm các thành viên là các nhà toán học hàng đầu - đã tham khảo ý kiến khắp nơi. Không phải ai cũng đồng tình với chiến lược trao giải thưởng bằng tiền mặt, nhưng phần lớn đều tò mò muốn

---

[247] Các vấn đề liên quan đến việc chọn bài toán được phác thảo trong bài báo đã nhắc đến ở Chương 1 bởi giám đốc sáng lập của Học viện Toán học Clay, Arthur Jaffe. Bài báo có tựa đề "Thách thức lớn Thiên Niên Kỉ của Toán Học (The Millennium Grand Challenge in Mathematics)" trong *Notices of the American Mathematical Society*, 53, no. 6 (2006): 652-660.

[248] Từ video *The CMI Millennium Meeting Collection: Lectures by M. Atiyah, T. Gowers và J. Tate* (đạo diễn bởi F. Tisseyre), New York: Springer, 2002.

biết những bài toán nào đã được chọn. Trên thực tế, trang web của học viện đã bị phá vỡ do lượng truy cập quá tải so với dự tính, và lưu lượng truy cập trên trang web dự phòng tại Hội Toán học Mĩ cũng đe dọa làm các máy chủ của viện ngừng hoạt động.

Giới toán học có cảm quan về lịch sử tốt hơn so với các nhà khoa học thuộc ngành khác (và nhiều người lập luận rằng toán học gần với nghệ thuật hơn là khoa học). Hội nghị thiên niên kỉ nói trên đã lặp lại một cách có ý thức hội nghị Paris năm 1900, nơi mà một bài thuyết trình David Hilbert đã cung cấp cho Đại hội Quốc tế một danh mục các bài toán thiết lập lộ trình toán học cho thế kỉ tiếp theo. Hội nghị năm 2000 bắt đầu bằng một bài diễn thuyết ngắn của Chủ tịch Học viện Toán học Clay, Arthur Jaffe. Ông kết thúc bằng việc bật đoạn ghi âm bài diễn thuyết nổi tiếng của Hilbert năm 1930, một trong những bài diễn thuyết trước công chúng cuối cùng của Hilbert, và là bài diễn thuyết đầu tiên của ông được phát sóng trên radio. Hilbert đã được trao tặng danh hiệu công dân danh dự của thành phố Königsberg, nơi ông sinh ra, như một việc làm của hội đồng thành phố nhằm bày tỏ sự tôn kính khi ông nghỉ hưu. Cảm động, Hilbert đã chuẩn bị kĩ càng và thực hiện một buổi diễn thuyết sinh động lập luận rằng toàn bộ nền văn hóa của các thời đại, mỗi khi có liên quan đến sự hiểu biết và khai thác tự nhiên đều dựa trên những nền tảng toán học. Ông công khai chỉ trích chủ nghĩa bi quan tri thức và đồng thời cũng chỉ trích khái niệm về một sự tồn tại nào đó của một vấn đề không thể giải quyết được.

Gần bảy mươi năm sau đó, mọi người trong khán phòng của Viện Hàn lâm Khoa học gần như cảm thấy rõ ràng sự rúng động khi giọng nói mạch lạc, khỏe khoắn của Hilbert vang lên và bài nói chuyện này kết thúc bằng một câu của ông, nay trở thành câu trào phúng: "*Wir müssen wissen, wir werden wissen*" (Chúng ta bắt buộc phải biết, chúng ta sẽ biết). Tất cả mọi người đều biết câu danh ngôn này và đều có thể nhận thấy cảm xúc mạnh mẽ của Hilbert. Tất cả đều nhận ra rằng sự trớ trêu tăng lên gấp bội. Königsberg đã hoàn toàn bị tàn phá trong chiến tranh và sau này rơi vào tay nước Nga.[249] Vài tháng sau bài diễn thuyết của Hilbert, Kurt Gödel đã chứng minh rằng không thể nào tìm ra được một hệ tiên đề logic mà chỉ nhờ vào đó ta có thể thiết lập mọi kết quả có thể nhận thức được trong lí thuyết số mà không dẫn đến một loại mâu thuẫn nào đó. Logic luôn có giới hạn.

Sau bài diễn thuyết của Jaffe, Timothy Gowers, người đã nhận được Huy chương Fields phát biểu về tầm quan trọng của toán học. Bằng cách nói tránh đặc trưng của giới toán học, ông nêu lên lợi ích của việc đầu tư thông qua sự tài trợ cho các nhà toán học, để họ có thể theo đuổi chuyên ngành riêng dựa trên cảm quan riêng của họ về

---

[249] Königsberg cũng là nguyên quán của Immanuel Kant. Ngày nay được gọi là Kaliningrad, và người Nga đến và dần phục hồi lại dân số cho thành phố sau Thế chiến II. Thành phố đóng cửa đối với người nước ngoài vào thập kỉ 1950. Sau khi Liên bang Xô viết sụp đổ và sự gia nhập vào liên minh châu Âu của Ba Lan và Lithuania năm 2004, thành phố hoàn toàn bị bao bọc bởi các nước thành viên liên minh châu Âu. Hiện nay người ta đang thảo luận về việc đổi lại tên thành phố.

cái đẹp và sự hài hòa. Sau đó một người từng được nhận Huy chương Fields khác và là cựu hiệu trưởng của trường Trinity, ngài Michael Atiyah, và nhà lí thuyết số nổi tiếng John Tate phát biểu những ý chính và căn bản của bảy bài toán đã được chọn làm các bài toán thiên niên kỉ. Tất cả bảy bài toán đều rất nổi tiếng đối với bất cứ nhà toán học nghiêm túc nào: ai trong số họ cũng đều nhận thức là chúng cực kì khó và hết sức quan trọng.

Thay vì dựng lên các bài toán rõ ràng đòi hỏi sự khai triển của một lí thuyết hoàn toàn mới, ủy ban cố vấn Học viện Toán học Clay đã chọn các bài toán cụ thể, rõ ràng. Mặc dù quyết định đề ra các giải thưởng không phải là không có bàn cãi, và mặc dù một số bài toán khác cũng có thể nằm trong danh mục đó, không ai có thể chỉ ra rằng có một bài toán trong danh mục là không xứng đáng. Ủy ban đã lựa chọn rất đúng đắn.

Bài toán đầu tiên được nói tới là giả thuyết Poincaré. Mặc dù nó được chọn bởi tất cả các nhà toán học mà Học viện Toán học Clay đã tham khảo ý kiến,[250] hiệu ứng tâm lí của việc gộp nó vào danh sách là vô cùng lớn. Khi các bài toán ở trong tình trạng không có lời giải đáp trong một thời gian dài, sự nản lòng có thể xuất hiện. Có lẽ bài toán không thể giải được là bởi vì nó đòi hỏi các tiên đề mạnh hơn về lí thuyết tập hợp, hơn là các tiên đề thường được sử dụng. Hay có thể phỏng đoán đúng, nhưng

[250] Khi chọn các bài toán, có hai bài toán mà tất cả các nhà toán học đều liệt vào danh sách: Giả thuyết Poincaré và Giả thuyết Riemann. (Xem Jaffe.)

chẳng thể giải thích tại sao: sự may mắn tình cờ của một sự triệt tiêu đại số có thể làm phản ví dụ đã không xảy ra, và chẳng còn gì khác nữa để nói cả. Hay có lẽ bài toán không thực sự quan trọng đến vậy. Có thể giả thuyết Poincaré chỉ là một khía cạnh rất nhỏ của một chuyên ngành rất nhỏ, rất chuyên biệt của toán học gọi là topo ba chiều cổ điển.

Việc thêm vào danh sách giả thuyết Poincaré gửi đi một thông điệp rất rõ ràng: giả thuyết này thực sự quan trọng. Với toàn bộ giới khoa học, với tất cả chúng ta. Nó là một phần trong kho tàng di sản trí tuệ chung của nhân loại. Âm vang của hội thảo, những lời cuối cùng của Hilbert qua đài phát thanh, còn nói lên nhiều điều hơn thế. Tư tưởng của Hilbert về việc không có bài toán nào là không thể giải được là sai lầm, nhưng sự lạc quan cơ bản của ông lại hoàn toàn đúng. Chúng ta *có thể* giải quyết giả thuyết Poincaré. Nếu không phải là bạn hay là tôi, thì là một ai đó ở đâu đó. Và đáp án sẽ là bổ ích cho tất cả chúng ta.

NGƯỜI ĐÓ LÀ GRIGORY PERELMAN?

Vào ngày 11 tháng 11 năm 2002, Grigory Perelman đưa một bài báo lên trang www.arXiv.org, một trang chủ trực tuyến lưu giữ các bài báo trước khi in, nay đã trở thành nơi trao đổi tin cậy của nhiều lĩnh vực trong vật lí, toán học và khoa học máy tính. Perelman gửi mail thông báo

cho một số ít người về sự đăng bài đầu tiên. Anh đưa lên hai bài báo khác vào bốn và tám tháng sau.[251]

Bài báo tháng 11 đó ngay lập tức thu hút sự chú ý. Đầu tiên, bài báo sáng sủa và thực tế một cách lạ thường. Hướng tới những ai làm việc với dòng chảy Ricci, nó bắt đầu bằng một mô tả rất ngắn gọn công trình của Hamilton: "Hamilton đã khám phá một tính chất đáng chú ý của các nghiệm... [đã cho phép anh] so sánh độ cong của nghiệm ở các điểm khác nhau, vào các thời điểm khác nhau. Những kết quả này dẫn Hamilton đến một vài phỏng đoán nào đó về cấu trúc của các giới hạn của sự bùng nổ trong ba chiều...; công trình này sẽ chứng minh chúng."[252] Điều gì thế này? Những chuyên gia về dòng chảy Ricci biết rất rõ những phỏng đoán đòi hỏi kĩ năng cực kì cao này. Những phỏng đoán này quá khó, gắn trực tiếp tới các lĩnh vực nơi mà Hamilton và những người khác dường như đã đâm vào những vách núi không thể vượt qua trong nỗ lực chứng minh phỏng đoán hình học hóa của họ. Việc chứng minh được chúng sẽ tạo nên một sự tiến bộ đột phá và các hệ quả hình học theo sau cũng sẽ đáng kinh ngạc.

Đề phòng bị hiểu lầm, Perelman viết thêm: "Việc thực hiện chương trình Hamilton sẽ dẫn đến phỏng đoán

---

[251] G. Perelman, "The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications", math.DG/0211159 (11 November 2002), "Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds", math.DG/0303109 (10 March 2003), "Finite Extinction Time for the Solutions to the Ricci Flow on Certain Three-Manifolds", math.DG/0307245 (17 July 2003).

[252] G. Perelman, "The Entropy Formula", 2.

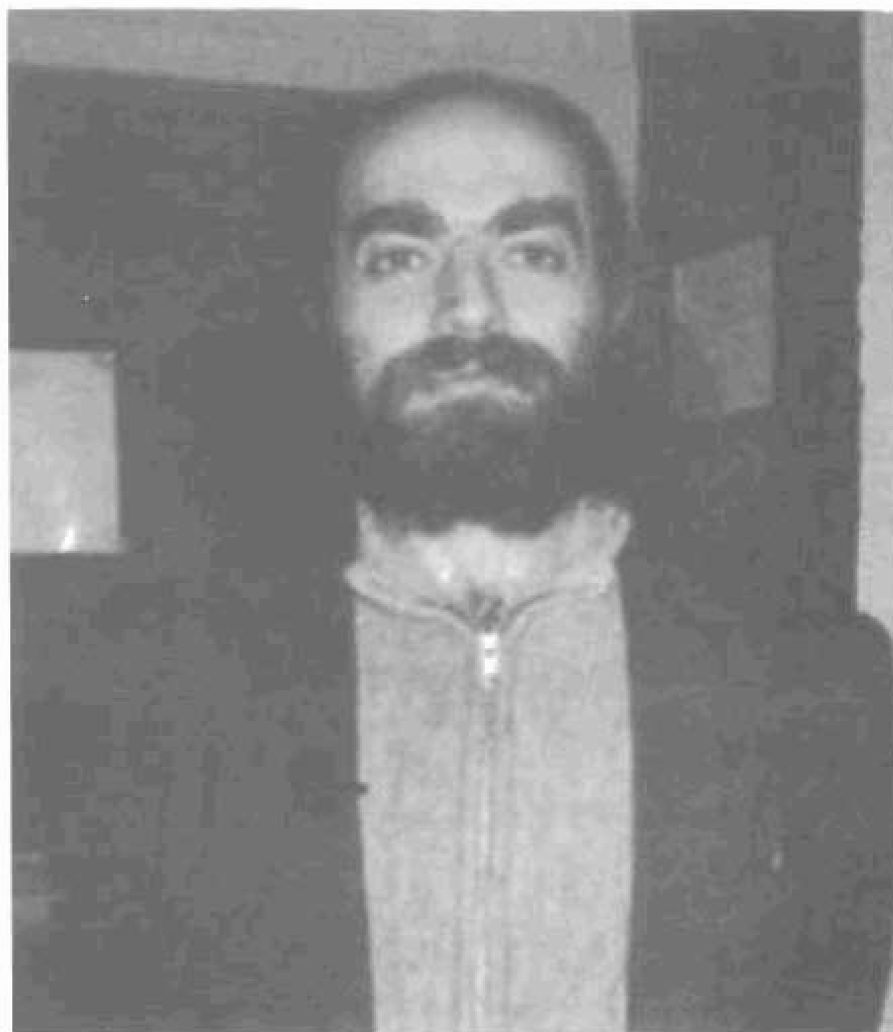
hình học cho các đa tạp bậc ba đóng",[253] và tiếp tục với việc nói rằng, mặc dù anh không thể xác nhận hi vọng của Hamilton rằng độ cong không trở thành vô cùng ở một vài vùng khi thời gian tiến đến vô cực, anh vẫn có thể chứng minh rằng những vùng như vậy có thể sụp đổ theo một cách có kiểm soát, và điều này là đủ để rút ra các kết luận về topo học.

Không có nhà toán học nào không thể nhận ra tính xác thực của lập luận. Tiếp đó, một cách khó thể tin được, Perelman còn tiến xa hơn. Xa hơn nhiều. Anh ám chỉ đến một mối liên hệ giữa dòng chảy Ricci và một dòng chảy rất khác nó trong vật lí lượng tử kết nối không gian ở các trạng thái khác nhau. Ở đây, tham số không phải là thời gian mà là thang độ; và không gian của chúng ta được mô phỏng không phải bằng một đa tạp với một mêtric, mà bằng một hệ thống thứ bậc các đa tạp và các mêtric liên kết với nhau bằng phương trình dòng chảy Ricci. Sự thay đổi về mặt bản chất trong cách nhìn nhận như vậy gợi lại bài giảng tập sự của Riemann. Ngành toán này thuộc về thế kỉ mới và thiên niên kỉ mới, nhưng khái niệm về một hệ thống thứ bậc của các mêtric có lẽ sẽ làm hài lòng Riemann.

Perelman viết: "Chú ý rằng chúng ta có một nghịch lí ở đây: các vùng có vẻ như xa nhau ở một thang độ có khoảng cách lớn lại có thể trở nên gần nhau ở một thang độ có khoảng cách nhỏ hơn; hơn thế nữa, nếu chúng ta cho phép dòng chảy Ricci chảy qua các điểm kì dị, các

[253] G. Perelman, "The Entropy Formula", 3.

vùng ở các thành phần liên thông khác nhau ở một thang độ có khoảng cách lớn có thể trở nên kề cận nhau..."[7] Đây là một câu chuyện khoa học viễn tưởng.



Hình 52. Grigory Perelman.

Sau đó, hãy cùng trở về với mặt đất. Anh viết tiếp. "Dù sao đi nữa, mối liên hệ này giữa dòng chảy Ricci và dòng chảy RG [nhóm tái chuẩn hóa] gợi ý rằng dòng chảy Ricci phải giống như các dòng chảy có độ dốc; công trình này sẽ chứng minh điều đó."[7] Được, chúng ta hầu như đã trở về với mặt đất. Dòng chảy có độ dốc đã được hiểu khá

kĩ càng, nhưng tuyên bố rằng dòng chảy Ricci có thể được xem như một dòng chảy có độ dốc lại thể hiện một nhận thức khác mang tính cơ sở. Perelman đưa ra những ý chính trong bài báo của anh, ghi chú rằng mười mục đầu tiên áp dụng với bất kì chiều nào và không cần giả thuyết về độ cong. Ba mục cuối liên quan đến cách tiếp cận của Hamilton cho phỏng đoán hình học hóa. "Cuối cùng, trong mục 13, chúng tôi sẽ tóm lược sơ qua phỏng đoán hình học hóa."[254] Anh hứa hẹn một bài báo thứ hai với đầy đủ chi tiết hơn trong tương lai gần.

Thực ra, Perelman đã nói, "Tôi vừa mới chứng minh được hầu hết mọi điều mà Richard Hamilton đã phỏng đoán về dòng chảy Ricci. Ôi, nhân tiện, điều này cũng có nghĩa là tôi đã chứng minh phỏng đoán hình học hóa, và vì vậy, tôi cũng đã chứng minh giả thuyết Poincaré. Nhưng điều thực sự thú vị ở đây là tôi đã chứng minh rằng dòng chảy Ricci có một vài tính chất đúng với mọi số chiều bất kì mà không ai nghĩ tới trước đây, và những tính chất này đem lại các hệ quả ngạc nhiên."

Điều này là sự kết hợp hết sức kì quặc giữa việc nói giảm nói tránh và sự táo bạo. Gần như tất cả mọi người khác đều sẽ bắt đầu bằng "Tôi đã chứng minh giả thuyết Poincaré" hay "Tôi đã chứng minh phỏng đoán hình học hóa". Vì anh không bắt đầu như vậy, sẽ rất ít người ngay lập tức trân trọng những điều mà Perelman hướng đến. Tuy nhiên, đối với các chuyên gia về dòng chảy Ricci, tuyên bố của Perelman đã gây sửng sốt. Những khía cạnh

---

[254] G. Perelman, "The Entropy Formula", trang 4.

mang tính kĩ thuật mà anh nhắc đến là cả một trận đấu bóng nhưng anh lại nhìn kiên định vào những điều trên tầm của trận bóng đó. Perelman biết rằng chứng minh này của anh cho giả thuyết Poincare là những tin tức gây chấn động, nhưng gần như là anh đã muốn làm giảm đi tầm quan trọng của nó. Gần như không ai nhận ra ý nghĩa thực sự trong thông báo của anh, nhưng những ai đã nhận ra thì lại không nhận xét gì cả.

Bài báo của Perelman trái ngược với tuyên bố của Martin Dunwoody của Đại học Southampton vài tháng trước, rằng ông đã khám phá một chứng minh của giả thuyết Poincaré dựa trên thuật toán Rubinstein-Thompson. Rourke đã chỉ ra một sai sót, Dunwoody rút lại bài báo. Dunwoody là một nhà toán học rất đáng kính trọng. Nhưng bài báo của Perelman nằm ở một cấp độ trọng đại hoàn toàn khác - bài báo vượt quá cả tham vọng, và giả thuyết Poincaré hay thậm chí cả phỏng đoán hình học hóa cũng không phải là mục đích chính của nó.

Tất cả mọi bài báo với sự pha trộn giữa một tầm nhìn, sự cẩn trọng và uy tín của Perelman không sớm thì muộn đều sẽ thu hút sự chú ý của mọi người. Nhưng Perelman lúc đó không hẳn là một người không tên tuổi. Bị lãng quên thì có thể, chứ không hề vô danh.

Khi còn niên thiếu, Perelman đã từng chiến thắng trong các kì thi Olympic toán học toàn Liên bang Xô viết. Chất lượng của việc giảng dạy toán học ở Liên Xô rất cao, kể từ những năm còn là học sinh nhỏ tuổi cho đến giai đoạn nghiên cứu sinh, với sự tham gia của các nhà toán học vào các chương trình tiểu học và trung học. Các sinh

viên có năng khiếu được phát hiện sớm, trong một truyền thống mạnh mẽ của sự dẫn dắt. Perelman đã từng là học sinh của một trường trung học chuyên toán-lí nổi tiếng ở Saint Petersburg.[255] Năm 1982, anh là một trong ba thí sinh đạt điểm tối đa trong kì thi Olympic Toán quốc tế tại Budapest.[256]

Đầu những năm 1990, Perelman trải qua một số năm nghiên cứu sau tiến sĩ tại Mĩ, nơi mà tài năng của anh đã gây được chú ý, và ngày nay vẫn còn được nhớ đến. Đến năm 1993, vào tuổi 27, anh đã đạt được nhiều thành tựu: Anh đã làm sáng rõ hơn lí thuyết về các đa tạp có độ cong bị chặn dưới bởi một giá trị lớn hơn không. Anh cũng đã giải quyết một bài toán quan trọng trong hình học Riemann gọi là *giả thuyết Soul*, đòi hỏi phải xác định bản chất các đa tạp có độ cong được phép bằng không.[257] Nếu độ cong luôn lớn hơn không, thì đa tạp đó đồng phôi với không gian Euclid. Perelman đã chỉ ra rằng nếu độ cong bằng không ở một số vùng và lớn hơn không ở các vùng còn lại, thì sẽ có một vùng của không gian, gọi là *vùng Soul*, chứa tất cả các tính chất topo của đa tạp theo một nghĩa nào đó. Nếu độ cong không bao giờ nhỏ hơn không và nếu khi chỉ cần có một điểm mà ở đó độ cong lớn hơn không, thì theo Perelman, vùng Soul chỉ là một

---

[255] Trường trung học Leningrad số 239.

[256] Hai thí sinh kia là Bruno Haible của Đức và Lê Tự Quốc Thắng của Việt Nam.

[257] Nó đòi hỏi đa tạp phải là không compac và phải hoàn chỉnh. Hoàn chỉnh có nghĩa là mọi biên bất kì (hay các điểm mất tích) phải cách nhau rất xa.

điểm duy nhất, và đa tạp đó phải đồng phôi với không gian Euclid.[258] Bài báo được in năm 1994, năm mà bài báo cuối cùng của anh được phát hành. Năm đó, anh được mời diễn thuyết tại Đại hội Toán học Thế giới diễn ra ở Zurich. Sau đó, anh quay trở về Nga và gần như mất tích. Năm 1996, anh nhận được giải thưởng của Hội Toán học châu Âu nhưng không bao giờ xuất hiện để nhận giải.

Chuyên môn của Perelman hoàn toàn thuộc về lĩnh vực mà ở đó mọi cố gắng sử dụng các phương pháp hình học vi phân để tấn công giả thuyết Poincaré đều đã thất bại. Công trình của anh vào đầu thập kỉ 1990 liên quan đến các đa tạp có những vùng mà ở đó độ cong bằng không - chính xác là những vùng nơi mà dòng chảy Ricci làm phát sinh các điểm kì dị và ngành giải tích bất lực.

Và còn một điềm báo cuối cùng. Perelman đã là thành viên của nhóm vật lí toán học ở phân viện Saint Petersburg của Học viện Steklov.[259] Đây là một nhóm huyền thoại đã có các đóng góp mang tính quyết định và nền tảng cho sự hiểu biết của chúng ta về phương trình vi phân từng phần. Vài thập kỉ trước khi qua đời vào năm 2004, tinh thần của Olga Ladyzhenskaya là nguồn cảm hứng; nhà toán học kiều diễm và xuất chúng này có cha

---

[258] G. Perelman, "Proof of the Soul Conjecture of Cheeger and Gromoll", *Journal of Differential Geometry*, 40 (1994): 299-305.

[259] Viện Steklov là thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học Nga, được dời về Moscow vào năm 1940. Còn phân viện Saint Petersburg vẫn nằm ở chỗ cũ, thỉnh thoảng có vài sự tranh đua thân thiện nhưng quyết liệt giữa nhóm ở Moscow và nhóm ở Saint Petersburg.

bị hành hình mà không xét xử bởi chính quyền của Stalin[290] đã dành trọn đời cho toán học. Rất ít trung tâm khác có sự tập trung các cá nhân hiểu rõ hơn họ những điểm tinh tế trong biểu hiện của các đáp án của các phương trình tích phân parabolic phi tuyến tính - lớp các phương trình mà dòng chảy Ricci thuộc về. Thậm chí còn ít hơn nữa những trung tâm có được sự lãnh đạo của một cá nhân xuất sắc hơn thế, nhiệt thành hơn thế và thấu hiểu được sự tận tâm cống hiến đến như vậy.

Không quá lâu sau đó, dư luận phản ứng lại quả bom câm lặng Perelman. Các hộp thư điện tử sớm bị tràn ngập. Tám ngày sau bài báo tháng 11 của Perelman được đưa lên, Vitali Kapovitch của Đại học California tại Santa Barbara gửi email cho Perelman: "Chào Grisha, xin lỗi vì làm phiền anh nhưng rất nhiều người hỏi tôi về văn bản chờ in ấn "Công thức entropy cho dòng chảy

---

[290] Biến cố này được mô tả chi tiết trong cuốn sách *The Gulag Archipelago* (New York: Harper and Row, 1973) của bạn bà là Alexandr Solzhenitsyn. Ladyzhenskaya đồng thời cũng là bạn thân của nhà thơ Anna Akhmatova. Xem thêm một cuốn tiểu sử đầy cảm động ca ngợi tính cách cũng như thành quả toán học của Ladyzhenskaya cùng nhiều bức ảnh trong S. Friedlander, P. Lax, C. Morawetz, L. Nirenberg, G. Seregin, N. Ural'tseva, and M. Vishik, "Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004)", *Notices of the American Mathematical Society* 51, no. 11 (2004): 1320-1331. Ladyzhenskaya có các đóng góp quyết định cho sự hiểu biết của chúng ta về phương trình Navier-Stokes, phương trình chi phối dòng chảy của chất lỏng và do vậy liên quan đến dự báo thời tiết (bầu khí quyển của chúng ta cũng là một chất lỏng). Phương trình này cũng là chủ đề của một bài toán thiên niên kỉ khác của Học viện Toán học Clay.

Ricci..." của anh. Liệu tôi hiểu thế này có đúng không, rằng mặc dù anh chưa thể thực hiện tất cả các bước trong chương trình Hamilton, nhưng anh có thể thực hiện một lượng vừa đủ sao cho bằng cách sử dụng các kết quả sụp đổ, anh có thể chứng minh phỏng đoán hình học hóa? Vitali." Email trả lời đến một ngày sau, "Đúng vậy. Grisha."[261]

Nghi ngờ pha lẫn hi vọng. Các nhà hình học và các nhà giải tích chờ đợi bài báo tiếp theo của Perelman cung cấp thêm chi tiết để hoàn thành chứng minh đã được phác thảo trong Chương 13 ở bài báo đầu tiên của anh. Bài báo hoàn toàn thiên về mặt kĩ thuật này được đưa lên trang www.arXiv.org vào ngày 10 tháng 3 năm 2003. Trong đó, Perelman sửa lại phát biểu của hai kết quả trong bài báo đầu tiên, tuy nhiên vẫn đồng thời chứng minh rằng sự sửa chữa này không ảnh hưởng đến các kết luận. Tháng sau, Perelman thăm nước Mĩ, thuyết giảng tại Cambridge và Stony Brook như đã đề cập ở Chương 1. Khi quay trở về Nga, anh gửi thêm bài báo thứ ba vào ngày 17 tháng 7, trình bày một kết quả thiên hơn về giải tích, kết quả này cho phép anh sử dụng bài báo đầu tiên, và - ít khó khăn hơn - phân nửa bài báo thứ hai để một cách trực tiếp chứng minh giả thuyết Poincaré.[262] Một

---

[261] Đoạn trao đổi này được chuyển đến Don Davis ở trường Lehigh, và được đề nghị đưa lên nhóm trao đổi topo đại số mà Davis điều hành.

[262] Thực ra, anh chứng minh cả một phỏng đoán khác nữa của Thurston, phỏng đoán ellip hóa (*elliptization conjecture*), nói rằng mọi đa tạp ba chiều với nhóm cơ bản hữu hạn có một mêtric có độ

tháng sau, Tobias Colding va William Minicozzi tìm ra một cách chứng minh khác đơn giản hơn, thiên về hình học hơn cho kết quả giải tích này.

Trong suốt ba năm kể từ khi bài báo đầu tiên của Perelman được đưa lên, công trình của anh luôn nhận được sự khảo sát kĩ lưỡng chưa từng có trong tiền lệ. Bruce Kleiner va John Lott của Đại học Michigan đã lập ra một trang web lưu trữ những nhận xét chi tiết về các bài báo của Perelman.[263] Bản chép tay các bài giảng của anh cũng được đưa lên.

Học viện Toán học Clay, có nhiệm vụ tài trợ và truyền bá toan học ngay lập tức có hành động. Tháng 11 năm 2003, Richard Hamilton nhận một giải thưởng nghiên cứu của học viện này cho công trình về dòng chảy Ricci của ông. Lott và Kleiner, người đã ghi chú cho bài báo đầu tiên của Perelman nhận được tài trợ của học viện để viết một văn bản mở rộng mang tính hướng dẫn và rất chi tiết cho từng dòng trong bài báo thứ hai của Perelman.[264] Tháng 8 năm 2004, viện đã mở ra và dẫn dắt một workshop kéo dài một tuần tại Princeton, với sự tham gia của khoảng một tá người có liên quan mật thiết đến công trình của Perelman. Khóa học mùa hè kéo dài

---

cong dương không đổi. Phỏng đoán này ít tổng quát hơn phỏng đoán hình học hóa, nhưng tổng quát hơn giả thuyết Poincaré theo ngay sau đó.

[263] www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html

[264] Những hướng dẫn này được gửi đăng và đưa lên mạng tại www.arXiv.org. Xem thêm B. Kleiner, J. Lott, "Notes on Perelman's Papers", math.DG/0605667, May 25, 2006 (192 trang)

bốn tuần của viện năm 2005 dành riêng cho chuyên đề dòng chảy Ricci. Khóa học này gồm một loạt sèri bài giảng truyền tải đến các nghiên cưu sinh, mà kỉ yếu của nó sẽ được sớm xuất bản. Nhà toán học Gang Tian của Đại học Princeton[265] và nhà toán học John Morgan của Đại học Columbia nhận được sự hỗ trợ một phần để thúc đẩy tiến trình của cuốn sách sắp ra, viết về công trình của Perelman.[266]

Các xê-mi-na nghiên cứu diễn ra trên toàn thế giới bàn về các kết quả của Perelman. Các nhóm nghiên cứu ở Grenoble, Trieste và Munich làm sáng tỏ thêm nhiều chi tiết. Tháng 6 năm 2005, Gerard Besson trình bày về công trình của Perelman tại xê-mi-na nổi tiếng của nhóm Bourbaki ở Paris.[267] Sau xê-mi-na kéo dài một năm tại Harvard, Huai-Dong Cao và Xi-Ping Zhu[268] viết một bài

---

[265] Lúc đó, Tian vẫn giữ một vị trí tại MIT

[266] J. W. Morgan, G. Tian, "Ricci Flow and the Poincaré Conjecture", math.DG/0607607, July 25, 2006 (473 trang).

[267] G. Besson, "Une nouvelle approche de l'étude de la topologie des variétés de dimension 3 d'après R. Hamilton et G. Perelman", *Séminaire Bourbaki,* 57ème année, 2004-05, no 947, Juin 2005.

[268] Cả hai đều là sinh viên của Shing-Tung Yau, nhà toán học của Harvard mà chúng ta đã nói ở trên trước, người nhận Huy chương Fields năm 1983 cho công trình về việc sử dụng phương trình vi phân từng phần để thiết lập sự tồn tại của các mêtric của các đa tạp khác nhau. Yau là một trong những nhà toán học có ảnh hưởng nhất thời nay, và là một bậc thầy về việc rút tỉa các kết luận hình học từ phương trình vi phân từng phần. Xi-Ping Zhu đến từ Đại học Zhongshan ở Quảng Châu, Trung Quốc, còn Cao đến từ Đại học Lehigh. Yau và Cao tiếp tục tổ chức các workshop về dòng chảy Ricci (xem, ví dụ, www.math.harvard.edu/ricci, ricci.pdf).

báo dài giải thích nhiều khía cạnh trong công trình của Hamilton và Perelman, đồng thời đưa ra một cách tiếp cận khác cho một vài tính toán của Perelman.[269] Các viện toán học khác, ở Mĩ và châu Âu, cùng với các nhà toán học trên khắp thế giới đã đóng vai trò to lớn trong việc tìm hiểu và viết lại nhận thức của Perelman.[270]

Những người này đã đem lại cho tất cả chúng ta một sự hiểu biết đầy đủ hơn về công trình của Perelman. Hamilton đã phân lớp các điểm kì dị của dòng chảy Ricci và bắt đầu một sự phân tích sơ bộ về chúng. Nhưng các điểm kì dị là những thứ mà các nhà toán học cố tránh. Ngược lại, Perelman mạo hiểm đi sâu vào những vùng ở gần các điểm kì dị của dòng chảy Ricci. Anh tìm thấy sự xuất hiện bất ngờ của các điểm thông thường, khi mà độ cong trở nên quá lớn đến nỗi không gian của đa tạp có nguy cơ phân hủy, và anh đưa ra các công cụ toán học mới để đo đạc sự sụp đổ tiềm ẩn. Anh chứng minh rằng việc chỉ có một loại điểm kì dị duy nhất là không thể xảy

---

[269] H.-D. Cao, X.-P. Zhu. "A Complete proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures-Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow", *Asian Journal of Mathematics* 10 no. 2 June 2006): 165-492.

[270] Brian Conrey, Giám đốc Viện Toán học Mĩ và David Eisenbud, Giám đốc Viện Nghiên cứu Khoa học Toán học tại Berkeley, đã tổ chức các workshop về công trình của Perelman. Còn ở châu Âu, Jean-Pierre Bourguignon (Giám đốc Viện Nghiên cứu Toán học Cao cấp (the Institut des Hautes Études Scientifiques) ở Pháp) và Gerhard Huisken (của Viện Albert-Einstein về vật lí trọng lực của Hội Max Planck (Albert-Einstein-Institut für Gravitationsphysik) ở Đức) lập ra các nhóm nghiên cứu.

ra, và những loại khác biểu hiện theo một cách có thể kiểm soát được. Trên thực tế, bản chất tự nhiên mang tính hình học của dòng chảy trở nên hầu như rõ ràng ở gần các điểm kì dị. Perelman chỉ ra rằng, khi dòng chảy chuyển dịch, những nơi mà điểm kì dị xảy ra trở thành các mảnh có thể được cắt rời khỏi đa tạp nguyên thủy- và những mảnh này có các dạng hình học mang tính đồng nhất theo nghĩa của Thurston. Sau khi các mảnh này được cắt ra, ta có thể khởi động lại dòng chảy Ricci và để nó chuyển động cho đến khi các điểm kì dị mới sinh ra và cùng với chúng là các khu vực mới mang những dạng hình học có tính đồng nhất. Ta lại có thể cắt những khu vực này rời ra và khởi động lại dòng chảy.

Không có sự tác động tương hỗ nào có thể gần hơn nữa giữa hình học và topo học mà ta có thể tưởng tượng được. Gần như là phỏng đoán hình học hóa của Thurston và dòng chảy Ricci được sinh ra cùng nhau. Dòng chảy Ricci là một cỗ máy xử lí đa tạp, kéo dài và định dạng, cắt thành các mảnh có các dạng hình học đồng nhất. Cuối cùng, toàn bộ đa tạp được phân chia thành các mảnh hình học. Các thảo luận chi tiết về công trình của Perelman bởi John Morgan, Michael Anderson và Laurent Bessières phát lộ con đường thần bí mà theo đó, dòng chảy Ricci thực sự hoàn thành phép chia một đa tạp bậc ba thành các mảnh nhỏ mang một dạng hình học đồng nhất.[271]

---

[271] M. T. Anderson, "Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow", *Notices of the American Mathematical Society*, 51, no. 2 (2004):

Kết quả cuối cùng không thể làm hài lòng hơn được nữa. Hãy lấy một đa tạp bậc ba không biên và không kéo dài ra mãi mãi. Ta có thể sử dụng các phương pháp tiêu chuẩn trong topo vi phân để đem lại cho nó một cấu trúc hình học. Còn bây giờ, hãy xem xét dòng chảy Ricci và để đa tạp tiến triển cùng nó. Nếu đa tạp là đơn liên (nghĩa là, nếu mọi vòng lặp trên nó có thể co rút thành một điểm) thì Perelman chứng minh rằng dòng chảy Ricci, có lẽ sau vài phân tích không gây hại, rốt cuộc sẽ làm trơn các điểm cực trị về độ cong, tạo ra một đa tạp có độ cong dương không đổi, đồng phôi với đa tạp nguyên thủy. Sau đó, các lập luận xưa cũ mà ai cũng biết, chỉ ra rằng một đa tạp ba chiều đơn liên có độ cong dương không đổi nhất thiết phải là khối cầu ba chiều. Vì vậy, công trình của Perelman đã chứng minh giả thuyết Poincaré.

CÒN HÌNH DẠNG VŨ TRỤ THÌ SAO?

Ở Canton, vùng cực Bắc của bang New York, cựu sinh viên của Thurston, người đã giành được học bổng "thiên tài" MacArthur dành cho nghiên cứu sinh - Jeff Weeks - sắp xếp các nghiên cứu nhằm xác định hình dạng vũ trụ. Weeks thuộc thế hệ những nhà toán học mới, sử dụng

---

184-193. L. Bessières, "Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Hamilton et G. Perelman", *Gazette des Mathématiciens* 106 (2005): 7-35. J. W. Morgan, "Recent Progress on the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds", *Bulletin of the American Mathematical Society* 42 (2005): 57-78.

internet để làm việc cách xa các trung tâm nghiên cứu chủ đạo. Anh điều hành trang web, www.geometrygames.org, nơi lưu trữ một số chương trình cho phép người xem điều khiển tàu không gian trong các vũ trụ có hình dạng khác nhau.

Nếu vũ trụ không quá lớn so với tuổi của nó, và hữu hạn nhưng không biên, thì chúng ta phải có khả năng quan sát xung quanh nó. Có một số sự phức tạp, bởi ánh sáng di chuyển với tốc độ hữu hạn, và vì vậy việc nhìn ra xa đồng nghĩa với việc nhìn ngược lại quá khứ. Nhưng như vậy chúng ta sẽ phải nhìn thấy rất nhiều hình ảnh của cùng một thiên hà đầy sao. Nỗ lực ghép các vùng khác nhau trên bầu trời với nhau dẫn đến một bài toán vĩ đại về thống kê gọi là *tinh thể học vũ trụ*. Các vòng lặp đóng không thể co rút thành một điểm sẽ nhô lên như các đầu nhọn trong *biểu đồ tần số sự tách cặp* - một công cụ toán học sư dụng để tìm kiếm tính tuần hoàn trong dữ liệu. Nếu vũ trụ đủ nhỏ, sự thiếu vắng các điểm nhô như vậy sẽ gợi ý rằng vũ trụ của chúng ta là đơn liên.

Trong một vũ trụ nhỏ ở mức vừa đủ và không đơn liên, một tập hợp dữ liệu khác đến từ vùng gọi là *các bề mặt phát tán cuối cùng* có thể cho phép chúng ta suy ra hình dạng của vũ trụ trong một số trường hợp nào đó. Các bề mặt phát tán cuối cùng sẽ giao nhau, và các vòng tròn mơ xuất hiện dọc theo các vùng giao nhau sau khi đã tính trung bình độ nhiễu nền. Bố cục của các vòng tròn này sẽ cho phép ta xác định bề mặt của không gian. Những năm đầu tiên của thế kỉ 20 đã diễn ra một cuộc tìm kiếm các vòng tròn có thể cho thấy vũ trụ có topo

giống như không gian khối mười hai mặt của Poincaré. Tuy nhiên, vòng tròn được mong đợi này có vẻ như không tồn tại. Hoặc vì vũ trụ quá lớn, hoặc vì nó là một khối cầu, mà cũng có thể vì nhóm cơ bản của nó khác cả hai trường hợp kia. Một khả năng khác là, một vài nguồn nhiễu từ một số vật thể che khuất các vòng tròn này.

Hiện tại, một số quan sát thiên văn gợi ý rằng độ cong trung bình của vũ trụ chúng ta là rất gần với không.[272] Phần lớn các nhà vật lí thiên văn tin vào một vũ trụ phẳng chiếm ưu thế, mặc dù người ta không thể loại bỏ khả năng vũ trụ có độ cong dương chỉ lớn hơn không một chút (Bằng chứng thực nghiệm dường như loại bỏ khả năng vũ trụ có độ cong âm.). Nhờ công trình của Perelman, chúng ta biết được rằng, nếu chỉ có một số lượng hữu hạn các vòng lặp đóng không tương đương trong vũ trụ, thì vũ trụ phải có độ cong dương. Tuy nhiên, câu hỏi về hình dạng vũ trụ vẫn còn đang rất rộng mở.

Riemann đã từng đưa ra khái niệm đa tạp như một mô hình toán học để khám phá các khu vực khác nhau của không gian. Trong bài diễn thuyết năm 1854, ông nhận xét rằng dù sao cũng phải tồn tại các mô hình khác. Năm mươi năm sau, Poincaré hoàn thành công trình của mình về topo đại số, để lại cho chúng ta giả thuyết Poincaré. Gần một thế kỉ sau nữa, Perelman trao cho

---

[272] Kết luận này rút ra bằng việc kết hợp quan sát từ ba nguồn khác nhau: bức xạ nền vũ trụ, vụ nổ siêu tân tinh loại 1a, ước tính khối lượng

chúng ta một món quà có thể so sánh với món quà mà chúng ta nhận từ Poincaré và Riemann. Không thể có chuyện bề mặt Trái Đất và vũ trụ có hình dạng giống như các đa tạp nếu chúng được quan sát ở một tỉ lệ nhất định. Nếu nhìn gần hơn vào bề mặt Trái Đất, chúng ta sẽ thấy có những cây cầu - cả tự nhiên lẫn nhân tạo - làm thay đổi topo của nó. Nhìn gần hơn nữa, bề mặt Trái Đất không còn trơn nhẵn mà trở nên rời rạc, được tạo thành bởi các nguyên tử và phân tử khác nhau. Cũng giống như vậy, vũ trụ có thể kết nối theo nhiều cách với các đa tạp ba chiều nhỏ ở gần các lỗ đen. Nhìn gần hơn nữa trong chính không gian đó, nó giống như một loại bọt lượng tử, có thể là với rất nhiều hình cầu nhỏ có nhiều chiều hơn dính với mọi điểm. Một vật thể như vậy với các topo khác nhau tùy thuộc vào các tỉ lệ khác nhau chắc chắn sẽ được mô hình hóa tốt hơn bằng các đối tượng của toán học lượng tử, loại đối tượng mà Perelman đã thoáng nhìn ra. Riemann có lẽ cũng đồng tình.

GIẢI THƯỞNG

Chỉ trong vài năm đầu của thế kỉ 20, đã rõ ràng rằng phương pháp hoạt động của cộng đồng toán học sẽ rất khác so với thói quen của giới toán học vài thập kỉ trước đó. Những người tổ chức của Học viện Toán học Clay đặt ra giả thuyết rằng bất kì nhà toán học nghiêm túc nào cũng sẽ công bố kết quả của mình trên một tờ báo nào đó. Trên thực tế, điều lệ nguyên gốc nhấn mạnh rằng những

lời giải đủ điều kiện để nhận giải thưởng thiên niên kỉ phải xuất hiện trên một tạp chí toán học được đánh giá là danh tiếng trên toàn thế giới, và sẽ được chấp nhận khoảng hai năm sau. Mặc dù Perelman không gửi công trình của mình đến tạp chí nào trong hơn một thập kỉ, anh chắc chắn đã công bố công trình của mình sao cho các đồng nghiệp có thể kiểm tra. Bây giờ, điều lệ của viện chấp nhận sự công bố ở các dạng khác.

Bởi sự thực là Perelman dường như không quan tâm đến giải thưởng này, và thực ra đã bắt đầu làm việc với giả thuyết hình học hóa vào năm 1995, rất lâu trước khi bảy giải thưởng thiên niên kỉ được đưa ra, ta có thể đưa ra câu hỏi rằng những giải thưởng thiên niên kỉ này có đóng vai trò gì hay không trong việc giải đáp giả thuyết Poincaré. Khá kì lạ, câu trả lời là có, nhưng không theo cách mà những người tổ chức tưởng tượng. Một kết quả phức tạp như của Perelman có lẽ không thể nhận được sự chấp nhận nhanh và rộng rãi như vậy nếu không có sự trợ giúp đúng lúc từ Học viện Toán học Clay. Học viện này không hỗ trợ Perelman, mà đúng hơn nó hỗ trợ những ai có thể hiểu được công trình của anh và truyền đạt lại cho người khác. Sự bình duyệt là rất quan trọng trong toán học. Việc đảm bảo một công trình là đúng cho phép những người khác dựa vào nó và diễn đạt lại nó theo cách khác. Ngược lại, sự chấp nhận do sai lầm một kết quả không đúng có thể giết chết cả một lĩnh vực. Bình duyệt tốt đòi hỏi hiểu biết, và hiểu biết nghĩa là người ta phải tái tạo toán học cho mình. Tái tạo, vui thay, lại dễ hơn so với việc sáng tạo hay khám phá, nhưng dù sao

cũng không phải là tầm thường. Công trình của Perelman sử dụng công cụ của nhiều lĩnh vực khác nhau và cực kì tinh tế. Ít người có khả năng đánh giá nó một cách đúng đắn, và nếu không có hỗ trợ từ Học viện Toán học Clay, một số trong số ít người này sẽ không có thời gian để bình duyệt công trình của Perelman bởi điều này sẽ kéo họ ra khỏi những công trình mà bản thân họ đang phải thực hiện.

Thêm vào đó, đến cuối năm 2005, tất cả mọi dấu hiệu đều cho thấy chứng minh của Perelman là đúng. Tại một cuộc gặp gỡ ở Trieste tháng 6 năm 2005 để kiểm chứng tiến độ nghiên cứu trong lĩnh vực các đa tạp bậc ba dưới sự soi sáng từ công trình của Perelman, những người tham gia đã xem kĩ lại toàn bộ các bài báo của Perelman và bỏ phiếu công nhận rằng giả thuyết Poincaré đã được chứng minh.[273] Đương nhiên, đây không giống như các quá trình bình duyệt cẩn thận và độc lập, nhưng đó là một dấu hiệu mang tính hi vọng. Số lượng các chứng minh nhầm lẫn trước đó được đề xuất cho phỏng đoán này đã làm cho mọi người cẩn thận, và các lập luận sử dụng phương trình vi phân từng phần được biết là cực kì khó.

---

[273] Trung tâm Quốc tế Abdus Salam về vật lí lí thuyết (ICTP) ở Trieste đã tổ chức một số buổi họp mặt cấp cao tại Trieste mỗi năm dành riêng cho các chủ đề trong vật lí lí thuyết và toán học. Tháng 6 năm 2005, đại biểu tại trường hè ICTP và hội thảo về hình học và topo của đa tạp bậc ba xác nhận chứng minh (Xem "Shapes, Spaces, and Spheres", *News from ICTP, Summer 2005.*). Không cần phải bàn cãi, một lá phiếu loại này rất khác so với một quá trình bình duyệt cẩn thận.

Sau đó, một cách bất ngờ, tháng 6 năm 2006, các tin đồn bắt đầu lan trên internet cho rằng có thể có một số vấn đề trong các bài báo của Perelman. Các bản dịch từ báo chí Trung Quốc cho rằng có một số lỗ hổng trong chứng minh phỏng đoán hình học hóa của anh, nhưng chúng đã được lấp nhờ hai nhà toán học Huai-Dong Cao và Xi-Ping Zhu.[274] Người ta đã trích dẫn như thế đó là lời của Shing-Tung Yau, nhà toán học đã nhận Huy chương Fields đã công bố trước một hội thảo toán học lớn về lí thuyết dây ở Bắc Kinh rằng, công trình của Cao và Zhu là tuyệt đối trọng yếu bởi vì các lỗ hổng trong công trình của Perelman là khá lớn. Sự mập mờ bắt đầu khi các thông tin trái ngược nhau lan truyền. Ngày 25 tháng 6, Học viện Toán học Clay đã đưa lên mạng, mà không kèm theo một lời bình nào của các đường liên kết trên trang nhà của viện đến các trang web có chứa bài báo của Cao-Zhu, quyển sách của Morgan-Tian và bản thảo chờ in của Kleiner-Lott, cùng với một đường dẫn đến trang web mà Kleiner và Lott quản lí, và đến các bài báo của Perelman. Chuyện gì đang xảy ra? Liệu các lập luận của Perelman có sụp đổ? Phải chăng giả thuyết Poincaré còn bị nghi ngờ?

---

[274] Xem bản báo cáo tin tức của Xinhua từ 4 tháng 6, 2006 (news.xinhuanet.com/english/2006-06/04/content-4644754.htm).

15

Madrid, tháng 8 năm 2006

Đại hội Toán học Thế giới khai mạc ngày 22 tháng 8 năm 2006 tại Madrid. Gần bốn nghìn nhà toán học từ 120 nước đã đổ về thủ đô Tây Ban Nha những ngày trước.

Chưa bao giờ có đại hội toán học nào được mong chờ rộng rãi đến như vậy. Hàng tháng trời trước đó, các thông cáo báo chí đưa tin số phận của giả thuyết Poincaré sẽ được làm sáng tỏ trong đại hội.[275] Richard Hamilton được mời đọc diễn thuyết toàn thể đại hội đầu tiên, John Morgan cũng được sắp xếp để đọc báo cáo về giả thuyết Poincaré. Các hoạt động của mùa hè càng làm cho không khí thêm phần háo hức. Trong suốt mùa hè, mối quan

---

[275] Thông cáo bảo chí chính thức đầu tiên của đại hội vào tháng 4, tức đúng 5 tháng trước khai mạc, đã khẳng định rằng giả thuyết Poincaré sẽ là tâm điểm của hội thảo. Cũng trong công bố đó, vị chủ tịch người Tây Ban Nha của Ủy ban điều hành, Manuel De León đã cho rằng đáp án của Perelman cho giả thuyết sẽ được chính thức chấp nhận trong đại hội. Những thông cáo tiếp theo chỉ tập trung vào điểm chính này.

tám về khả năng phỏng đoán đã thực sự được giải đáp, và nghi vấn liệu lập luận của Perelman có đúng hay không càng ngày càng lớn hơn. Liệu anh có được nhận Huy chương Fields không? Điều kiện của giải là người nhận phải ít hơn bốn mươi tuổi vào tháng 1 của năm trao giải. Perelman bước sang tuổi bốn mươi ngày 13 tháng 6 năm 2006, vì vậy đây là lần cuối cùng mà anh thỏa mãn điều kiện để nhận giải. Liệu anh có xuất hiện không? Và liệu Ủy ban Fields có trao giải thưởng này cho người từ chối nó không?

Câu chuyện tràn ngập trên báo chí. Các bài báo về giả thuyết Poincaré và về bản thân Perelman xuất hiện trên toàn thế giới. Ngay khi đại hội bắt đầu, báo *The New Yorker* in một bài báo gây rúng động của hai phóng viên được kính trọng chứng minh rằng, Shing-Tung Yau đã cố tình dấy lên nghi vấn về kết quả của Perelman ở Trung Quốc nhằm giành thành tích cho hai sinh viên của mình[276] Các phóng viên này đã bay đến Saint Petersburg, thăm Perelman, và thuật lại rằng nhà toán học ẩn dật này sẽ từ chối Huy chương Fields.

Hội nghị này là đại hội (toán học) quốc tế đầu tiên tổ chức tại Tây Ban Nha, và Madrid là một nơi đặc biệt thích hợp. Chín thế kỉ trước, cách Madrid khoảng 400 dặm, ở lân cận thành phố Toledo, các bản dịch sang tiếng Latin của Gherard xứ Cremona những công trình của người

---

[276] Sylvia Nasar và David Gruber, "Manifold Destiny: A Legendary Problem and the Battle over Who Solved It", *The New Yorker* (August 28, 2006), 44-58

Arập về toán học và khoa học, và các bản dịch của người Arập và các công trình khoa học của Hi Lạp, đã làm dấy lên làn sóng học thuật ở châu Âu. Các bản dịch của ông về những tác phẩm của Euclid, Ptolemy và các bình luận của al-Nayrizi về tác phẩm *Cơ sở* đã khơi mào cho việc thành lập các trường đại học đầu tiên.

Những nhà toán học Tây Ban Nha đã nỗ lực hết sức để chào đón các đồng nghiệp. Đúng như sự nhận xét đầy tự hào của họ, hội nghị này là sự quy tụ đông đảo nhất các nhà toán học ở Madrid kể từ năm 1581, thời điểm mà quyết định rời đô về Madrid đã khiến Madrid trở thành nơi tập trung nhiều nhà toán học nhất thời đó ở châu Âu. Vua Juan Carlos làm chủ lễ trao các Huy chương Fields. Vị vua nổi tiếng này đã thành lập chính phủ dân chủ sau cái chết của vị tướng độc tài Franco năm 1975. Sự dũng cảm của ông trong việc chống lại nỗ lực đảo chính của cánh hữu năm 1981 là một bước ngoặt trong lịch sử Tây Ban Nha đương đại. Những năm sau đó, Tây Ban Nha đã chứng kiến sự tăng trưởng kinh tế vượt bậc và sự nở rộ thực sự của nghiên cứu toán học.

Các nhà toán học xếp hàng dài bên ngoài tòa nhà hội nghị để chờ đến lượt bước qua máy kiểm tra kim loại cũng như để người ta kiểm tra túi sách. Xe cần cẩu lớn chuyển đi bất cứ chiếc xe nào đậu gần trung tâm hội nghị, một biện pháp phòng ngừa kể từ khi xảy ra vụ đánh bom của Al Qaida trên tàu điện ngầm Madrid năm 2004, làm hơn 200 người chết và hơn 1.500 người bị thương.

10h30 sáng, đại hội khai mạc với đoạn phim, *Hình dạng qua thời gian*, gợi lại sự say mê của người Ma-rốc với

các mẫu hình đều và truyền thống hình học của đất nước đa sắc tộc Tây Ban Nha trong quá khứ. Đoạn phim được tiếp nối bằng một bản hòa tấu ngắn và là truyền thống, do bộ tam tấu đàn dây, dẫn dắt bởi Ara Malikian, một nhạc công violon tài ba người Tây Ban Nha gốc Lebanon và Armenia, cùng sự phối hợp của một cây guitar flamenco. Cuối cùng, Chủ tịch Hội Toán học Thế giới, nhà toán học ứng dụng nổi tiếng, Ngài John Ball, đọc diễn văn trước toàn bộ đại hội: "Khi chúng ta đang ăn mừng ngày hội toán học này với nhiều thảo luận mà nó đem lại, sự suy ngẫm về những con đường mà cộng đồng chúng ta đang đi là có ích lợi. Toán học là một nghề của những tiêu chuẩn cao sang và sự liêm chính. Chúng ta bàn luận một cách thoải mái công việc của mình với người khác mà không sợ bị đánh cắp, và các nghiên cứu được trao đổi một cách cởi mở trước khi công bố chính thức. Các quá trình biên tập luôn công bằng và đúng, và các công trình đạt được tiếng tăm của chúng qua sự xứng đáng chứ không phải bằng cách thức nâng đỡ. Đây là những tiêu chuẩn mà đại đa số các nhà toán học làm theo. Ngoại lệ rất hiếm, và chúng sẽ bị nhận ra." Những từ ngữ mạnh bạo đó được thuật lại bởi hầu hết các tờ báo như để thay cho lời bình luận của họ về các sự kiện diễn ra quanh giả thuyết Poincaré.[277]

Sau các diễn văn của vài vị quan chức, Ball công bố bốn Huy chương Fields theo thứ tự các chữ cái. Huy

---

[277] Ball sau đó đã nói với báo chí rằng ông để người khác tự do diễn giải lời nói của ông.

chương thứ hai được trao cho Grigory Perelman, "vì những cống hiến cho hình học và sự sáng suốt mang tính cách mạng của anh trong nhận thức về cấu trúc giải tích và cấu trúc hình học của dòng chảy Ricci."[278] Một bức ảnh lớn của Perelman, trông giống như một giáo sĩ trong Kinh Cựu Ước, lóe sáng trước đám đông. Ball cắt ngang những tiếng vỗ tay: "Tôi thực sự tiếc vì Tiến sĩ Perelman đã từ chối Huy chương Fields." Một vài tiếng vỗ tay đâu đó vang lên - biểu hiện sự đồng tình với quyết định trao huy chương cho Perelman bất chấp việc anh từ chối - và sau đó, là sự tĩnh lặng, rồi tiếp nối là tiếng thở phào vừa đủ nghe thấy của đám đông.

Tiếp theo lễ trao giải là một buổi tiệc chiêu đãi với đầy những khay tapas[279] do thành phố Madrid tài trợ. Các bài thuyết trình ngắn về công trình của các nhà toán học vừa được trao Huy chương Fields diễn ra sau buổi ăn trưa. John Lott tổng kết những thành tựu của Perelman, nhấn mạnh cả tính chất cực kì cách mạng của những thành tựu đó lẫn năng lực lớn lao của Perelman về mặt kĩ thuật.

Sau đó, Richard Hamilton đọc bài báo cáo toàn thể đầu tiên trước đại hội. Trong một bài diễn thuyết cực kì phong phú, Hamilton khảo sát công việc của chính ông

---

[278] Các giải kia thuộc về nhà toán học gốc Nga Andrei Okounkov của Princeton, nhà toán học người Úc Terence Tao của UCLA, và nhà toán học người Pháp gốc Đức Wendelin Werner của Đại học Paris-Sud và École Normale Supérieure.

[279] Tapas: các loại thức ăn nhẹ khai vị truyền thống của Tây Ban Nha: khoai tây chiên, hạt ôliu, bánh sandwich,... (ND)

về dòng chảy Ricci, kĩ thuật mà ông đã đề xuất và là công trình cả đời của ông. Ông kể lại chi tiết cách thức mà ý tưởng sử dụng dòng chảy Ricci đến với ông sau khi nghe một bài giảng của James Eells bốn mươi năm trước đó. "Giả thuyết là không có một chút topo nào cả", ông nói lại, viện dẫn cho giả thuyết này rằng, không có vòng lặp nào là không thể co rút thành một điểm, và vì vậy các nhà topo học không có gì trong tay để nhào nặn cả: "Do đó, chúng tôi, những nhà giải tích, có thể giúp họ, những nhà topo học". Hamilton, nhà giải tích, có thể được tha thứ dù cho đã thích thú về việc ngành giải tích đến và cứu rỗi ngành topo học. Một trăm năm trước, Poincaré phát minh ra lĩnh vực topo đại số để cứu các nhà giải tích; khi họ vô vọng đối mặt với trạng thái hỗn độn phát sinh trong các phương trình chi phối chuyển động của các hành tinh. Sự sử dụng giải tích của Perelman để giải quyết bài toán vĩ đại nhất của ngành topo học đã trả được nợ - và cả lãi nữa - cho món nợ một trăm năm trước.

Hamilton bàn kĩ hơn về khái niệm then chốt entropy mà Perelman đã đưa vào để chứng minh định lí không-sụp-đổ-tới-hạn. Định lí này cho phép ta sử dụng dòng chảy Ricci để cắt nhỏ một đa tạp thành các mảnh có cấu trúc hình học. Mặc dù ông và các cộng sự sau đó đã khám phá một vài sự đơn giản hóa, Hamilton vẫn nhấn mạnh rằng lập luận của Perelman là hoàn toàn chính xác. "Tôi thật sự biết ơn Grisha vì đã làm việc này", ông bình luận, "Tôi đã phải vò đầu khi đi tìm sự không-sụp-đổ trong một vài trường hợp. Giờ thì tôi sẽ không bao giờ phải lo lắng về nó nữa." Bản tóm lược - ít nhiều mang tính kĩ

thuật - về các chứng minh của Perelman của Hamilton đã làm cả hội trường đông nghẹt sáng tỏ rằng những lập luận này của anh hấp dẫn và sáng tạo như thế nào. "Tôi nghĩ rằng tôi cũng ngạc nhiên như bất kì ai khi nhìn thấy tất cả những điều này đều đúng", Ông đãm chiêu. "Tôi cực kì biết ơn Grisha Perelman đã kết thúc tất cả."

Những lời nói ngạc nhiên và biết ơn này sẽ được người khác nhắc lại trong suốt đại hội. Hai ngày sau đó, Trưởng khoa Toán Đại học Columbia, nhà hình học đại số đầy thành tựu John Morgan, diễn thuyết giả thuyết Poincaré cho người nghe không chuyên. Rất được kính trọng và cực kì cẩn thận, ông đã từng tham gia một cách tích cực vào việc kiểm tra kết quả của Perelman. Mọi ghế ngồi trong khán phòng đều kín, người nghe tập trung vào từng lời của ông. Để xua tan mọi nghi ngờ, Morgan thẳng thừng công bố: "Grigory Perelman đã giải quyết giả thuyết Poincaré." Không khí căng thẳng nhường chỗ cho tiếng vỗ tay.

Morgan tóm lược lại lịch sử của giả thuyết này, nhận xét rằng nó liên quan đến hầu hết mọi khía cạnh của sự phát triển hình học và topo học trong thế kỉ 20. Ông vinh danh chứng minh như một "thành tích kì diệu" không chỉ của Perelman mà cho toàn bộ toán học. Từng bước phát triển về giả thuyết này đã làm nảy sinh các lĩnh vực toán học mới quan trọng, và đem lại Huy chương Fields cho những người nghiên cứu nó như Milnor, Smale, Freedman, Donaldson, Thurston và Yau. Morgan nhắc lại một lời tự đánh giá của Isaac Newton[280],

---

[280] "Nếu tôi nhìn thấy xa hơn, đó là nhờ tôi đứng trên vai những người khổng lồ." Isaac Newton (xem ví dụ trong, *The Columbia World of Quotations*, 1996).

nhận xét rằng Perelman đã đứng trên vai những người khổng lồ, đặc biệt là Richard Hamilton, người mà công trình khó nhọc của ông trong suốt hai mươi lăm năm đã đặt nền móng cho dòng chảy Ricci. "Bây giờ tất cả đã được kiểm chứng một cách đầy đủ", Morgan nói lại lần nữa: "Anh ấy (Perelman) đã chứng minh giả thuyết Poincaré." Sự thích thú của ông đối với sự giải quyết của giả thuyết Poincaré đã rõ ràng đối với mọi người.

Còn giải Thiên niên kỉ thì sao? Chủ tịch Học viện Toán học Clay, James Carlson, trả lời phóng viên tại Madrid rằng chiếc đồng hồ của hai năm chờ đợi đã bắt đầu quay cùng với sự xuất hiện của ba bài báo trên trang chủ của viện. Mặc dù Perelman không gửi đăng trên các tờ báo được viện yêu cầu, các bài báo của ông vẫn được kiểm tra cẩn thận.[281] Carlson tuyên bố rằng, cũng như ủy ban xét trao Huy chương Fields, nếu viện quyết định trao giải thưởng cho Perelman, thì giải thưởng sẽ được trao cho dù Perelman có đồng ý nhận nó hay không.

Theo quan điểm của hội đồng xét trao huy chương Fields và các bản báo cáo của Lott, Hamilton, Morgan, chỉ có chút ít nghi ngờ về việc Perelman sẽ là chủ nhân của một trong bảy giải thưởng Thiên niên kỉ. Quyết định khó khăn của việc có phải chia giải thưởng này cho người khác hay không, và chia như thế nào sẽ thuộc về hội đồng cố vấn của Học viện Toán học Clay. Thời gian sẽ trả

---

[281] Phản biện bài báo của Cao-Zhu chỉ ra một lỗi nhỏ và không ai nghi ngờ về sự đúng đắn của kết quả này. Tuy nhiên, báo *New Yorker* đã đặt câu hỏi thực chất ai là người tìm ra lỗi này.

lời cho chúng ta biết quyết định của họ là gì, và liệu Perelman có chấp nhận giải thưởng này hay không.

Khi đại hội bế mạc, nhiều chi tiết về Perelman xuất hiện thêm. Anh đã rời Viện Steklov. Xuất thân là người Nga theo đạo Do Thái, cha và chị gái anh đã di cư sang Israel, Perelman sống với mẹ ở Nga. Các phóng sự ban đầu thuật rằng việc anh từ chối Huy chương Fields là hệ quả của việc anh bị chối bỏ bởi cộng đồng toán học, nhưng dường như điều này là không có cơ sở. Cũng giống như Gauss, Perelman tránh việc xuất hiện trước công chúng và không muốn phát biểu nhân danh toán học. May mắn thay, không giống như Gauss, anh đã viết lại công trình của mình vì lợi ích của toàn thể chúng ta, và đồng thời cũng trả lời email cho Morgan và những người khác trước một vài yêu cầu làm sáng tỏ.

Toàn bộ tầm ảnh hưởng của công trình của Perelman trở nên rõ ràng khi thiên niên kỉ mới trôi đi. Morgan cho rằng công trình của Perelman sẽ cho phép ta sử dụng dòng chảy Ricci để khảo sát các đa tạp bốn chiều. Ông đoán định rằng, các kĩ thuật của Perelman có thể được sử dụng để tạo nên các bước tiến trong hiểu biết về các loại phương trình vi phân parabol khác. Lịch sử chỉ ra một cách lặp lại rằng, các tiến bộ trong việc nắm bắt các phương trình vi phân từng phần sẽ dẫn đến những ứng dụng có tính thực tiễn đầy quyền năng.

Nếu ta suy đoán nhiều hơn, bài báo của Perelman còn gợi ý rằng, dòng chảy Ricci không chỉ đơn thuần là một công cụ giải tích để thu được thông tin hình học của

các đa tạp: bản thân nó (dòng chảy Ricci) là một đối tượng hình học dựa theo tiêu chuẩn của riêng nó, đồng thời nó cho phép ta thống nhất các đa tạp có topo khác nhau ở các tỉ lệ khác nhau. Trong bài tham luận một ngày sau buổi diễn thuyết của Morgan, với chủ đề "Các vấn đề toán học trong thuyết tương đối rộng", nhà nữ toán học vật lí lừng danh người Pháp, Yvonne Choquet-Bruhat, đã thảo luận về sự cần thiết phải có các đa tạp được mô phỏng hóa trong các không-thời gian khác nhau ở các tỉ lệ khác nhau: Không-thời gian ở đây tương tự những gì mà Perelman đã đặt ra trong trường hợp không gian. Công trình của Perelman cung cấp một cách hứa hẹn các công cụ trừu tượng mới để tư duy về không gian và thời gian.

Phải mất hơn 100 năm người ta mới giải quyết được câu hỏi mà Poincaré đã đặt ra trên trang cuối cùng của chương cuối cùng trong bài báo cuối cùng thuộc về sêri các bài báo topo vĩ đại của ông. Qua những năm đó, topo học và người họ hàng lớn tuổi hơn, hình học, đã phát triển thành các lĩnh vực chặt chẽ và mạnh mẽ, làm tâm điểm cho toán học và khoa học. Toán học mà Poincaré dựa vào bắt nguồn từ 5.000 năm trước ở vùng Babylon, nay thuộc nước Iraq. Toán học cổ đại đã được truyền đi và được trau chuốt gọt giũa từ thế hệ này sang thế hệ khác, nhờ những người Hi Lạp trên các hòn đảo nằm ngoài khơi - mà ngày nay là Thổ Nhĩ Kì, cho đến những người kế tục họ ở Athens và Alexandria, nhờ các học giả Jaina và Hindu ở Ấn Độ, nhờ các nền văn minh Hồi giáo ở phía Đông và Nam Địa Trung Hải, nhờ các cộng đồng đa sắc tộc ở Tây Ban Nha và Sicily, và sau đó là nhờ các

nền văn minh Do Thái-Thiên Chúa giáo thời kì mở đầu của một châu Âu hiện đại và tiếp đến là thời Khai sáng.

Đến lượt mình, công trình của Poincaré đã tạo nên một vùng đất cho sự thăng hoa toán học thế kỉ 20. Có không ít hơn bốn bài toán thiên niên kỉ có liên hệ trực tiếp đến các công trình mà ông là người đi tiên phong. Chúng ta chỉ vừa mới bắt đầu quá trình nắm bắt một cách đầy đủ những gì mà ông đã thoáng nhận ra vào thời khắc chuyển giao của thế kỉ trước.

Chúng ta đang sống trong thời đại có năng suất cao nhất trong toàn bộ lịch sử nhân loại. Và ta thực sự thỏa mãn khi nhận thấy rằng những công trình tuyệt đẹp của Thurston, Hamilton, và Perelman đã đặt nền móng cho một thời đại mới. Toán học là công việc của các cá nhân. Nhưng các ý niệm và các định lí của nó thì không phải là tài sản riêng của một người, một nhóm dân tộc, tôn giáo hay chính trị nào cả. Nó thuộc về tất cả chúng ta. Tri thức toán học được xây dựng trên nền tảng lao động của những người đi trước. Rất khó để đạt được nó, nhưng chúng ta thường không đánh giá đúng giá trị của nó. Bất cứ ai trong chúng ta đã học qua tiểu học cũng có thể giải các bài toán số học và đại số vốn đã đánh bại những nhà thần học thông thái nhất Babylon. Bất cứ ai đã học một vài khóa vi-tích phân và đại số tuyến tính có thể tìm đáp án cho các bài toán mà cả Pythagoras, Archimedes, thậm chí ngay cả Newton cũng không thể chạm tới. Một sinh viên cao học ngành toán ngày nay có thể nắm bắt các tính toán về topo mà Riemann và Poincaré còn không biết phải bắt đầu như thế nào. Chúng ta không thông

mình hơn họ đâu. Chẳng qua chúng ta được hưởng lợi từ họ.

Toán học gợi nhắc cho chúng ta biết chúng ta phụ thuộc vào người khác như thế nào: cả sự hiểu biết sâu sắc lẫn đầu óc tưởng tượng của những người đi trước, lẫn công lao của những người đã tạo ra các tổ chức xã hội và văn hóa, các trường lớp và đại học - những nơi đã đem lại giáo dục cho trẻ em, giúp chúng hoàn toàn dấn thân vào những ý tưởng của thời đại. Đến lượt tất cả chúng ta có nhiệm vụ đảm bảo rằng, di sản mà thời đại chúng ta để lại sẽ là một xã hội biết gìn giữ và phát triển những kế thừa toán học chung. Bởi toán học là một trong những hoạt động nhân văn tinh túy, giúp chúng ta hoàn thiện tính nhân bản, và qua đó, giúp chúng ta vượt qua chính mình.

Nhìn lên bầu trời đêm, ngắm các ngôi sao, thiên hà hay các cụm thiên hà xa xôi, tôi không thể tin rằng không có các sinh vật có trí tuệ trên đó, mà một vài loài có thể khác xa chúng ta. Vì vậy, trong vòng vài trăm năm nữa, nếu chúng ta có thể phát triển các công nghệ cho phép gặp gỡ, giao tiếp với họ, chúng ta sẽ khám phá ra rằng, họ cũng biết hay muốn biết rằng: đa tạp ba chiều compac duy nhất mà trong đó mọi vòng lặp có thể co rút thành một điểm là khối cầu bậc ba. Hãy cùng tin vào điều đó.

PHỤ LỤC

Giải thưởng thiên niên kỉ đầu tiên

Ngày 8 và 9 tháng 6 năm 2010, tại Viện Hải dương học và Học viện Henri Poincaré, Hội nghị Nghiên cứu thường niên của Học viện Toán học Clay được tổ chức với chủ đề "Đáp án cho giả thuyết Poincaré" (xem Hình 53). Diễn giả là những nhà toán học hàng đầu có thẩm quyền trong việc đánh giá đáp án của giả thuyết Poincaré. Hội thảo được dẫn dắt bởi Cédric Villani, Giám đốc Học viện Henri Poincaré và James Carlson, Giám đốc Học viện Toán học Clay. Trong hai ngày, các nhà toán học đã tóm tắt lại nội dung của phỏng đoán, sự phát triển trong vòng một trăm năm qua và đáp áp của Perelman. Buổi tối ngày mùng 8, Étienne Ghys từ trường Ecole normale superieuse Lyon đã dành một buổi nói chuyện cho công chúng với chủ đề "Toán học thuần túy là câu chuyện về nhóm", tóm tắt lại công trình của Poincaré về nhóm và mối quan hệ đến phỏng đoán. François Poincaré (sinh năm 1921), cháu nội còn sống của Henri Poincaré, thay mặt gia đình cảm ơn giới toán học đã gìn giữ tư tưởng của Henri Poincaré đến tận ngày nay bằng tiếng Anh với giọng ngập ngừng.

Clay Research Conference – PARIS 2010

Resolution of the Poincaré Conjecture

$$\pi_1(M) = 0 \implies M \simeq S^3$$



The Millennium Prize for resolution of the Poincaré conjecture has been awarded to **Grigoriy Perelman.**

SPEAKERS

June 8th | 9:30 AM

June 9th | 9:30 AM

In collaboration with the Institut Henri Poincaré

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE · www.claymath.org

Hình 53. Áp phích thông báo lễ công bố giải thưởng thiên niên kỉ đầu tiên của Học viện Toán học Clay.

Thuật ngữ

Aslas: bộ sưu tập bản đồ của các vùng bao phủ toàn bộ bề mặt Trái Đất, hay toàn bộ vũ trụ, hoặc toàn bộ một đa tạp nào đó.

Các số Betti: một số nguyên - là số lượng các đa tạp con không tương đương nhau của một chiều nhất định không là biên của một đa tạp con có số chiều cao hơn một so với số chiều của chúng.

Đường khép kín: một đường (đường cong) trên một đa tạp bắt đầu và kết thúc ở cùng một điểm.

Tổng liên thông: là đa tạp tạo thành bằng cách cắt một quả bóng rắn ra khỏi hai đa tạp, rồi đồng nhất các điểm trên hai mặt cầu biên của các phần còn lại của hai đa tạp nguyên thủy

Số phức: là các số thu được bằng cách cộng thêm vào số thực căn bậc hai của một số âm

Hệ quả: mệnh đề được suy ra dễ dàng từ định lí hoặc một mệnh đề khác.

Độ cong: một đối tượng toán học đo đạc độ lệch của tổng các góc trong một tam giác có đỉnh tại điểm đó so với 180 độ. Trên một đa tạp hai chiều, độ cong ở một điểm chỉ là một số.

Phương trình vi phân: phương trình mà trong đó người ta biết được tốc độ thay đổi của một đối tượng toán học chưa biết mà đáp án của phương trình chính là đối tượng đó.

Chiều: số bậc độc lập của tính tự do trong một tập hợp, hay là một số lượng tối thiểu các số thực (đó là số lượng tọa độ) cần thiết

để xác định một điểm ở gần một điểm cho trước trong một tập hợp

Tiên đề thứ 5: tiên đề thứ 5 và là tiên đề phức tạp nhất của năm tiên đề trong tác phẩm Cơ sở của Euclid: nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng sao cho tổng các góc trong ở cùng một phía nhỏ hơn hai góc vuông, và nếu hai đường thẳng đó là vô hạn thì chúng sẽ gặp nhau ở phía các góc trong nhỏ hơn hai góc vuông đó.

Phẳng: một không gian là phẳng nếu tổng các góc của mọi tam giác trong không gian đó là 180 độ.

Phỏng đoán hình học hóa: là phỏng đoán nói rằng, bất kì đa tạp ba chiều nào cũng có thể được cắt dọc theo các hình cầu và hình xuyến để tạo ra các mảnh nhỏ có dạng hình học là một trong số tám dạng hình học

Đường trắc địa: một đường chỉ ra khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm bất kì.

Tính chất hình học: một tính chất phụ thuộc vào cách định nghĩa về khoảng cách hay tính đối xứng (ví dụ, thẳng, độ lớn góc, vòng tròn).

Hình học: cấu trúc có được khi ta định nghĩa một khoảng cách trên một đa tạp.

Vòng tròn lớn: một vòng tròn tạo bởi một mặt cầu (hai chiều, tròn) với một mặt phẳng đi qua tâm của nó.

Nhóm (của các phép biến đổi): một tập hợp các phép biến đổi bền vững dưới các phép tính lấy tích số và lấy nghịch đảo.

Sự đồng phôi: phép tương ứng một-một giữa hai đa tạp, mà qua đó, các điểm gần nhau của một đa tạp tương ứng với các điểm gần nhau của đa tạp kia.

Bổ đề: một kết quả toán học rất cần thiết để chứng minh một kết quả khác.

Vòng lặp: một đường xuất phát và kết thúc tại cùng một điểm. Nói một cách chuyên môn hơn, là một phép chiếu liên tục của một khoảng lên một đa tạp, mà qua nó, cả hai điểm đầu được chiếu lên cùng điểm

Đa tạp: một tập hợp toán học có vẻ giống với không gian Euclid tại lân cận của mỗi phần tử của nó.

Mêtric: một quy tắc xác định khoảng cách giữa hai điểm bất kì của một tập hợp. Trong một đa tạp, một mêtric có thể được xác định bằng cách xác định quy tắc đo tốc độ dọc theo một đường cong

Không gian n chiều: tập hợp tất cả các bộ *n* số thực có thứ tự.

Độ cong âm: một khu vực trong một đa tạp có độ cong âm nếu tổng các góc của mọi tam giác trong khu vực đó nhỏ hơn 180 độ

Giả thuyết Poincaré: giả thuyết - nay đã được chứng minh - cho rằng mọi đa tạp ba chiều compac, đơn liên và không biên, đều đồng phôi với khối cầu ba chiều.

Độ cong dương: tổng các góc của mọi tam giác lớn hơn 180 độ.

Định lí Pythagoras: mệnh đề cho rằng bình phương độ dài cạnh huyền (cạnh đối diện với góc vuông) của một tam giác vuông bằng tổng bình phương của hai cạnh kề.

Dòng chảy Ricci: là quá trình chi phối bởi phương trình dòng chảy Ricci xác định rằng mêtric trên một đa tạp thay đổi theo cách của dòng chảy độ cong - chảy từ nơi có độ cong nhiều hơn đến nơi có độ cong ít hơn. Phương trình dòng chảy Ricci thực ra là một hệ phương trình có công thức mang tính biểu tượng như sau: $\partial(g_{ij}) = -2R_{ij}$.

Tensor độ cong Riemann: một đối tượng toán học gán một giá trị cho mọi hướng phẳng qua một điểm (tức là phản ánh tổng các góc của tam giác trắc địa nhỏ lệch so với 180 độ bao nhiêu)

Mặt cầu tròn: từ "tròn" nói đến một mặt cầu có cùng độ cong tại mọi điểm và được sử dụng khi ta muốn phân biệt các mặt cầu đó với các mặt cầu tương đương về mặt topo nhưng có thể có các điểm lồi lõm. Bề mặt Trái Đất không phải là một mặt cầu tròn bởi vì nó dẹt ở hai cực. Một mặt cầu tròn đẳng cự với tập hợp các điểm cách một điểm trong không gian Euclid một khoảng cách không đổi.

Đơn liên: một đa tạp đơn liên nếu mọi vòng lặp có thể co rút thành một điểm. Điều này tương đương với mệnh đề cho rằng nhóm cơ bản bao gồm một phần tử duy nhất là đồng nhất thức.

Hình cầu: nếu không nói gì thêm, đề cập đến một hình cầu hai chiều là một đối tượng đồng phôi với tập hợp các điểm trong không gian ba chiều có khoảng cách không đổi đến một điểm cho trước. Bề mặt của quả bóng là một hình cầu hai chiều. Tuy nhiên, tồn tại hình cầu ở vô số chiều. Định nghĩa đơn giản nhất của một hình cầu có số chiều xác định là: tập hợp tất cả các điểm có cùng khoảng cách đến một điểm cho trước trong không gian Euclid có số chiều nhiều hơn một so với số chiều của nó. Ví dụ như, tập hợp tất cả các điểm có khoảng cách đơn vị đến một điểm cố định trong không gian Euclid sáu chiều là một hình cầu năm chiều

Phương trình vi phân từng phần: một loại phương trình vi phân trong đó ta xác định tốc độ thay đổi tại các điểm khác nhau theo các hướng khác nhau. Đáp án của phương trình vi phân từng phần là các đối tượng có tốc độ thay đổi như mong muốn tại mọi điểm theo mọi hướng. Hầu hết các phương trình của ngành vật lí toán học là phương trình vi phân từng phần.

Định đề: là một điều khẳng định không cần chứng minh. Đồng nghĩa với tiên đề.

Chứng minh: một lập luận hoàn hảo và chính xác, trong đó mọi khẳng định là một tiên đề, hoặc là mệnh đề đã được chứng minh, hoặc là mệnh đề được suy luận dựa trên các quy tắc logic. Chứng minh được bắt đầu bằng tiên đề và các mệnh đề khác đã biết, kết thúc bằng tuyên bố rằng mệnh đề này đã được chứng minh.

Mệnh đề: một tuyên bố bắt nguồn từ định đề và các mệnh đề đã được chứng minh trước đó, bằng cách sử dụng các suy luận toán học.

Bề mặt: một đa tạp hai chiều.

Tensor: đối tượng toán học gán các số thực vào một số lượng cho trước các vectơ (nghĩa là vận tốc) tại mỗi điểm của một đa tạp.

Đa tạp ba chiều (hay đa tạp bậc ba): một hình dạng toán học lí tưởng mô hình hóa hình dạng mà không gian ba chiều - giống như vũ trụ của chúng ta - có thể có. Trong đó, khu vực xung quanh mỗi điểm có thể được chiếu vào bên trong một hình hộp chữ nhật đặc. Nói theo cách khác, vùng lân cận của mỗi điểm đều tương giống không gian ba chiều.

Khối cầu bậc ba: một đa tạp dựng lên bằng cách lấy hai quả bóng đặc, rồi đồng nhất các điểm trên các biên (là những mặt cầu hai chiều) của mỗi quả bóng đặc đó. Tập hợp các điểm có khoảng cách không đổi đến một điểm cố định trong không gian bốn chiều là một khối cầu bậc ba

Hình xuyến bậc ba: đa tạp dựng bằng cách nối các bề mặt đối diện của một hình hộp chữ nhật đặc.

Tính chất topo: tính chất bất biến dưới các phép đồng phôi liên tục. Ví dụ như tính liên thông, sự đơn liên, chiều.

Tương đương về mặt topo: hai đa tạp tương đương về mặt topo nếu chúng đồng phôi với nhau.

Topo học: ngành nghiên cứu hình dạng

Hình xuyến: dạng hình học giống với bề mặt của một chiếc bánh rán Mĩ.

Đa tạp hai chiều (hay đa tạp bậc hai): một hình dạng toán học lí tưởng mô hình hóa bề mặt của các Trái Đất có thể. Khu vực quanh một điểm có thể được chiếu lên một tờ giấy (nghĩa là phần bên trong của một hình chữ nhật trên mặt phẳng).

Không gian hai chiều (không gian bậc hai): mặt phẳng vạch ra bởi Euclid, kéo dài đến vô tận theo hai hướng độc lập. Nếu xét theo khía cạnh tập hợp, thì đó là tập hợp các cặp số thực.

Lịch trình theo chủ đề

Câu chuyện phát triển theo ba chủ đề có quan hệ với nhau như sau:

1. Quá trình phát triển của hình học, topo làm cơ sở và gắn liền với giả thuyết Poincare.

   Trường phái Babylon → trường phái Pythagoras → trường phái Alexandria (đặc biệt là Euclid) → phiên dịch qua thế giới Aráp → Gauss/Lobachevsky/Bolyai → Riemann → Poincaré → Gottingen/Moscow/Princeton → Không gian nhiều chiều → Thurston → Phương trình tích phân từng phần → Hamilton/Perelman.

2. Quá trình tiến hóa của câu hỏi về hình dạng vũ trụ:

   Egyptians → Greeks → Columbus và các nhà thám hiểm → Riemann → Einstein → Weeks

3. Quá trình tiến hoa của giới toán học:

   Babylonians → Các viện hàn lâm Hi Lạp → Hoàng gia Arập→ Các trường đại học đầu tiên → Xã hội khoa học→ Trường đại học nghiên cưu Đức → Trường đại học quốc gia → Trương đại học quốc gia liên bang Hoa Kì và liên bang Nga → Các tổ chức toán học và Internet.

Mỗi chủ đề này lần lượt mở ra cánh cửa lớn hơn của những sự kiện và nhân vật lịch sử.

Đây chỉ là lịch trình rất không đầy đủ giúp định hướng người đọc. Cột đầu tiên đưa ra một số ngày tháng (đã nói trong cuốn sách) từ thời Babylon đến hiện tại. Một số sự kiện (hầu hết là khám phá toán học) gắn với chủ đề 1 và 2 được liệt kê trong cột thứ hai. Sự kiện lịch sử đặc biệt quan trọng trong câu chuyện được liệt kê trong cột thứ ba. Sự kiện liên quan đến chủ đề thứ ba như các hội thảo hay việc thành lập các học viện được đề cập trong cột thứ tư.

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1700 TCN	Hình học tam giác	Hammurabi và triều đại Babylon đầu tiên	
547 TCN	Nguồn gốc và chứng minh đầu tiên của lí thuyết số	Triết gia người Ionia mất	
530 TCN		Pythagoras và đồ đệ chuyển đến Croton	Hội bán nguyệt Pythagoras
387 TCN			Viện Hàn lâm của Plato được thành lập

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
323 TCN		Alexander đại đế mất. Tướng của ông, Ptolemy tiếp quyền tại Ai Cập	Đại thư viện Alexandria được thành lập
300 TCN	Cơ sở của Euclid		
240 TCN	Ước tính đường kính Trái Đất của Erastosthenes		
47 TCN		Caesar đốt cảng Alexandria	
150 TCN	*Địa lí của* Ptolemy		
410		Rome bị người Alaric cướp phá	
415		Hypatia bị hành hình	
529			Viện Hàn lâm của Plato bị Justin Đại đế đóng cửa

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1088			Đại học Bologna được công nhận
1117			Đại học Oxford được công nhận
1144	Công trình dịch thuật các tác phẩm toán học và khoa học từ tiếng Hi Lạp sang tiếng Latin của Gherard bắt đầu		
1150			Đại học Paris bắt đầu hoạt động
1187	Gherard mất ở Toledo		
1209			Đại học Cambridge được công nhận
1320	*Thiên đàng* của Dante, vũ trụ là một khối cầu bậc ba		

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1492		Chuyến thám hiểm của Columbus	
1660			Hội Hoàng gia (London) hình thành
1636			Đại học Harvard được thành lập
1666			Viện Hàn lâm Khoa học Paris được thành lập
1724			Viện Hàn lâm Khoa học Nga/Saint Petersburg được thành lập
1737			Đại học Göttingen được thành lập
1746			Đại học Princeton được thành lập

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1789		Cách mạng Pháp	
1794	*Hình học* của Legendre		
1799		Napoleon lên nắm quyền	
1810			Humboldt mở trường Đại học Berlin
1814		Hội nghị Vienna	
1824	Gauss và Bolyai khám phá hình học Phi-Euclid		
1829	Lobachevsky công bố khám phá hình học Phi-Euclid bằng tiếng Nga trên tạp chí địa phương		
1837		Nữ hoàng Victoria lên ngôi; 7 giáo sư của Gottingen bị sa thải	Trường đại học dành cho nữ Mount Holyoke khai giảng

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1848		Cách mạng Đức; Klein ra đời	
1854	Bài giảng tập sự của Riemann	Poincaré ra đời	
1866	Riemann chỉ ra rằng topo học và giải tích gắn bó chặt chẽ với nhau		
1870		Chiến tranh Pháp-Phổ	
1880	Poincaré nhận ra rằng hình học Euclid là trọng tâm nghiên cứu của ông		
1881	Klein-Poincaré trao đổi thư từ		
1884			*Vùng đất phẳng* của Abbott xuất hiện
1886			Klein nhận lời mời từ Đại học Johns Kopkins; ông chuyển đến Gottingen

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1892			Đại học Chicago khai giảng, E H. Moore làm Trưởng khoa toán
1895	Bài báo topo đầu tiên của Poincaré		Hilbert nhận một vị trí tại Göttingen
1900	Hai mươi ba bài toán của Hilbert		
1904	Bài bổ sung thứ năm của Poincaré		
1905	Lí thuyết tương đối hẹp của Einstein		Veblen được thuê về Đại học Princeton
1908	Dehn gửi rồi rút lại chứng minh giả thuyết Poincaré		
1912	Poincaré mất		Birkhoff được thuê về Đại học Harvard
1914-18	Lí thuyết tương đối rộng của Einstein	Thế chiến I	Luzin được thuê về Moscow

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1932		Hitler chiếm ưu thế trong cuộc bầu cử ở Đức	Viện Nghiên cứu Cấp cao tại Princeton được thành lập
1934	Whitehead công bố chứng minh cho giả thuyết Poincaré. Cuốn sách của Seifert-Threlfall xuất hiện		
1935	Whitehead rút lại chứng minh. Cuốn sách của Alexandroff-Hopf xuất hiện. Đối đồng điều được công bố		Hội nghị Quốc tế về topo học tại Moscow
1939-45		Thế chiến II	
1950			Quỹ Khoa học Quốc gia của Mĩ được thành lập
1956	Hình cầu kì lạ của Milnor. Nash giải bài toán nhúng Riemann		

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1960	Smale giải giả thuyết Poincaré cho không gian nhiều hơn bốn chiều		
1982	Freedman giải giả thuyết Poincaré cho không gian bốn chiều. Hamilton sử dụng dòng chảy Ricci.	Đại hội Toán học Quốc tế 1982 bị hoãn	Perelman đoạt huy chương với số điểm tuyệt đối trong kì thi Olympic toán học Quốc tế tại Budapest Viện Nghiên cứu Khoa học Toán học tại Berkeley được thành lập.
1983	Công trình của Thurston về hình học và phân thớ cùng với công trình của Yau về giải tích hình học được nhận Huy chương Fields		Đại hội Toán học Quốc tế tại Warsaw
1986	Rourke, Rego công bố chứng minh giả thuyết Poincaré		

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
1994	Perelman giải phỏng đoán Soul		
1995	Chương trình Poênaru		
1998	McMullen nhận Huy chương Fields cho công trình đa tạp ba chiều hyperbolic		Đại hội Toán học Quốc tế tại Berlin
2000	Giải thưởng Thiên niên kỉ được công bố		
2001	Vệ tinh dị hướng vi sóng Wilkinson (WMAP) được phóng	Vụ khủng bố 11 tháng 9	
2002	Bài công bố đầu tiên của Perelman lên arXiv.org		Đại hội Toán học Quốc tế tại Bắc Kinh
2003	Perelman thuyết giảng tại MIT và Stony Brook		

NGÀY THÁNG	SỰ KIỆN TOÁN HỌC	SỰ KIỆN CHÍNH TRỊ	HỌC VIỆN
2006	Perelman được trao Huy chương Fields nhưng từ chối		Đại hội Toán học Quốc tế tại Madrid
2010	Perelman được trao giải Thiên niên kỉ nhưng từ chối		

Tham khảo

E.A. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1991.

C. Adams, *The Knot Book*, Providence: The American Mathematical Society, 2004.

S.K. Abdali, The Correct Qibla, http://www.patriot.net/users/abdali/ftp/qibla.pdf.

J.W. Alexander, "Note on two 3-dimensional manifolds with the same group", *Transactions of the American Mathematical Society* **20** (1919): 339-342.

J.W. Alexander, "Some problems in topology", *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich* (1932), Kraus Reprint (1967): 249-257.

M.T. Anderson, "Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow", *Notices Amer. Math. Soc.*, **51** no. 2 (2004): 184-193.

V.I. Arnold, "On Teaching Mathematics", *Russian Math. Surveys*, **53**, no 1 (1998): 229-236

M. Atiyah et al., Responses to "Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", by A. Jaffe and F. Quinn, *Bull. Amer. Math. Soc.* **30** (1994): 178-207.

D. Barden, C. Thomas, *An Introduction to Differential Manifolds*, London: Imperial College Press, 2003

A. Beardon *The Geometry of the Discrete Groups*, New York Springer-Verlag, 1983.

M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

L. Bessières, "Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Halmilton et G. Perelman", *Gaz. Math.* **106** (2005): 7-35

E.T. Bell, *Men of Mathematics*, New York: Simon and Shuster, 1937

R.H. Bing, "Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3", *Ann. of Math.* **68** (1958): 17-37.

R.H. Bing, "Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré Conjecture", in T. L. Saaty (ed.), *Lectures on Modern Mathematics II*, Wiley, New York, 1964, 93-128

G.D. Birkhoff, "Fifty Years of American Mathematics", *Science* **88**, No. 2290 (1938): 461-467.

G.D. Birkhoff, "Topology, *Science*", **96**, no. 2504 (1942): 581-584.

J. Birman "Poincaré's conjecture and the homotopy group of a closed, orientable 2-manifold", *J. Austral. Math. Soc.*, **17** (1974): 214-221

R. Bonola, *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Development* (trans. by H S. Carslaw), New York. Dover, 1955.

U. Bottazzini, *Henri Poincaré: Philosophe et mathématicien*. Paris: Pour la Science, 2000.

V. Brittain, *Testament of Youth, An Autobiographical Study of the Years 1900-1925*, New York, Penguin, 1989 (First published in London, 1933).

F. E. Browder, *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré* (2 vols), Providence: American Mathematical Society, 1983.

W. K. Buhler, *Gauss. A Biographical Study*, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1981.

J.J. Callahan, "The Curvature of Space in a Finite Universe", *Scientific American*, **235** (August, 1976), 90-100.

J. W. Cannon, W.J. Floyd, R. Kenyon, W.R. Parry, "Hyperbolic Geometry", in *Flavors of Geometry*, S. Levy (ed.) Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

H.D. Cao, B, Chow, S.C. Chu and S.T. Yau (eds), *Collected Papers on the Ricci Flow*, Somerville: International Press, 2003.

H-D Cao, X-P Zhu, "A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - Application of the Hamilton-Perelman Theory of the Ricci Flow", *Asian J. Math*, **10** (2006) 165-492.

B. Chow, "The Ricci flow on the 2-sphere", *J. Diff. Geom.*, **33** (1991): 325-334

W. K. Clifford, *Mathematical Papers* (ed. R. Tucker), London: Macmillan, 1882

J. Collins, *Good to Great. Why Some Companies Make the Leap ... and Others Don't*, HarperCollins, New York, 2001.

Dante Alighieri, *The Divine Comedy* (c. 1318, trans. A. Mandelbaum), New York: Knopf, 1995

G. Darboux, "Eloge Historique d'Henri Poincaré", in Poincaré, Henri *Oeuvres*, vol. 2 Paris: Gauthier-Villars, 1916.

M. Dehn and P. Heegard, "Analysis Situs", in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III*, AB 3, Teubner, Leipzig (1907): 153-220.

M. Dehn, *Papers on Group Theory and Topology* (trans. and intro. by J. Stillwell), New York: Springer-Verlag, 1987.

J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Washington Joseph Henry Press, 2001

D M. DeTurck, "Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors", *J. Diff. Geom*, **18** (1983) 157-162

A Doxiadis, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, New York, London, Bloomsbury, 1992, 2000.

M du Sautoy, *The Music of the Primes searching to solve the greatest mystery in mathematics*, New York Harper Collins, 2003.

J L. Dupont and C-H Sah, "Scissors Congruences", *J Pure. Applied Algebra* **25** (1982): 159-195

P. Duren, *A Century of Mathematics in America* (3 vols), Providence American Mathematical Society, 1989.

A.H. Durfee, "Singularities", in *History of Topology*, I.M. James (ed.), Amsterdam: Elsevier, 1999, 417-434

W.B Ewald, *From Kant to Hilbert: A Source book in the Foundations of Mathematics*, vol 1, Oxford Univ. Press, 1996.

M. Epple, "Geometric aspects in the development of knot theory", in *History of Topology*, I.M James (ed.), Amsterdam: Elsevier, 1999, 301-358

L.B. Feffer, "Oswald Veblen and the Capitalization of American Mathematics: Raising Money for Research", 1923-1928, *Isis* **89** (1998): 474-497.

R.H Fox, "Construction of Simply Connected 3-Manifolds" in *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, M.K. Fort (ed.), Prentice Hall. Englewood Cliffs, N J., 1962, 213-216

M. Freedman, "The topology of four manifolds", *J. Differential Geom.*, 17 (1982): 357-454.

S. Friedlander, P. Lax, C. Morawetz, L. Nirenberg, G. Seregin, N. Ural'tseva, and M. Vishik, "Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya (1922-2004)", *Notices of the American Mathematical Society* 51, no. 11 (2004) 1320-1331.

D. Gabai, "Valentin Poenaru's program for the Poincaré conjecture", in *Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott*, S-T. Yau (ed.), Cambridge: International Press, 1994; 139-166.

M. Gage, R.S. Hamilton, "The heat equation shrinking convex plane curves", *J. Diff. Geom.* 23 (1986) 69-96.

P. Galison, *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps: Empires of Time*, New York: W.W. Norton, 2003.

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, (Third Ed.) Berlin: Springer, 2004.

C. F. Gauss, *Werke*, Gottingen: K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, 1863-1933.

C. C. Gillespie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, New York: Scribner, 1971.

D. Gillman, D. Rolfsen, "The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré conjecture", *Topology* 22 (1983): 315-323.

J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, New York: Penguin, 1988.

L. Goldberg, A.V. Phillips (eds.), *Topological Methods in Modern Mathematics*, Houston: Publish or Perish Press, 1993.

C. McA. Gordon, "3-dimensional topology up to 1960", in *History of Topology*, I.M. James (ed.), Amsterdam: Elsevier, 1999, 449-490.

P. Gorman, *Pythagoras. A Life*, London, Boston: Routledge and K. Paul, 1979.

J. Gray, *Ideas of Space: Euclidean, non-Euclidean, and Relativistic*, Oxford, New York: Oxford University Press, 1979.

J. J. Gray, S.A. Walter (eds), *Henri Poincaré, Three Supplementary Essays on the Discovery of Fuchsian Functions*, Akademie Verlag GmbH, Berlin (and Albert Blanchard, Paris) 1997.

M. Grayson, "The heat equation shrinks embedded curves to round points", *J. Diff. Geom.* **26** (1987): 285-314.

J.L. Greffe, G. Heinzmann and K. Lorenz (eds), *Henri Poincaré, Science and Philosophy*, Akademie-Verlag, Albert Blanchard, 1996, pp. 241-250.

J. Hadamard, "L'oeuvre mathématique de Poincaré" *Acta Mathematica* **38** (1921): 203-287.

J. Hadamard, *Non-Euclidean Geometry in the Theory of Automorphic Functions*, (1951, trans. A. Shenitzer, ed. by J.J. Gray and A. Shenitzer, Providence: American Mathematical Society, 1999.

W. Haken, "Some results on surfaces in 3-manifolds", in *Studies in Modern Topology*, P.Hilton (ed), MAA Studies, Washington: Mathematical Association of America.

G.B. Halsted "Biography, Bolyai Farkas [Wolfgang Bolyai]" *American Mathematical Monthly* 3 (1896): 1-5

R.S. Hamilton, "Three-manifolds with positive Ricci curvature", *Journal of Differential Geometry* **17** (1982): 255-306.

R.S. Hamilton, "The Ricci flow on surfaces", in *Contemporary Mathematics* **71** (1988): 237-261.

R.S. Hamilton, "The formation of singularities in the Ricci flow", *Surveys in Differential Geometry* **2** (1995): 7-136.

C.H Haskins, *The Rise of Universities*, New York Gordon Press, 1957.

T.L Heath, *A History of Greek Mathematics* 2 vols Oxford, 1921.

T.L Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York: Dover, 1956.

G. Heinzmann, "Eléments preparatoire a une biographie d'Henri Poincaré", preprint

J Hempel, *3-Manifolds*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1976

T Heyerdahl *Early Man and the Ocean a search for the Beginnings of Navigation and Seaborne Civilizations*. Garden City, NY: Doubleday, 1979.

D. Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Teubner, 1899.

W. Irving *Life and Voyages of Columbus*, London: John Murray, 1830.

W. Jakbsche, "The Bing-Borsuk conjecture is stronger than the Poincare conjecture", *Fund. Math.*, **106** (1980): 127-134.

A. Jaffe, "The Millennium Grand Challenge in Mathematics", *Notices Amer Math Soc.*, **53** (2006): 652-660.

A. Jaffe and F. Quinn, "Theoretical mathematics: Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", *Bull Amer. Math. Soc.* **29** (1993) 1-13.

A. Jaffe and F. Quinn, Response to comments on "Theoretical mathematics", *Bull Amer Math. Soc.* **30** (1994): 208-211..

I.M. James (ed.), *History of Topology*, Amsterdam: Elsevier, 1999.

A Johns, *The Nature of the Book Print and Knowledge in the Making*, Chicago: University of Chicago Press, 1998.

V Kagan, *N. Lobachevsky and his contribution to science*, Moscow. Foreign Languages Publishing House, 1957

M. Kervaire, "A manifold which does not admit and differentiable structure", *Comment. Math. Helv.*, **34** (1960): 257-270.

F. Klein, *Vorlesungen uber die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, Teil I, II Berlin: Springer, 1926 (Teil I), 1927 (Teil II).

B. Kleiner, J Lott (eds/web-masters) "Notes and commetnaries on Perelman s Ricci flow papers",

http://www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html.

B. Kleiner, J Lott, "Notes on Perelman's Papers", arXiv:math.DG/0605667v1, 25 May 2006.

A. Kolmogorov, "The Moscow school of Topology", *Science* **97** no. 2530 (1943): 579-580

K. Koseki, „Poincarésche Vermutung in Topologie", *Math. J. Okayama Univ* **8** (1958): 1-106.

A Kosinski, *Differential Manifolds*, New York: Academic Press, 1993.

S. Letschetz, "Reminiscences of a mathematical immigrant in the United States", *American Math Monthly*, **77** (1970): 344-350.

S. Letschetz, "James Waddell Alexander (1888-1971)", *Yearbook of the American Philosophical Society (1973)* Philadelphia, 1974, 110-114.

D. Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*, Boston: Birkauser, 1999

J. Mawhin, "Henri Poincaré. A Life in the Service of Science" *Notices of the American Mathematical Society* **52** (2005): 1036-1044.

C. McMullen, "Riemann surfaces and the geometrization of 3-manifolds", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992): 207-216.

J. Milnor, "On the total curvature of knots", *Ann. of Math.* **52** (1950). 248-257.

J. Milnor, "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Ann of Math.* **64** (1956): 399-405

J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1968

J. Milnor, "Towards the Poincaré conjecture and the classification of three manifolds", *Notices Amer. Math. Soc.*, 50, no. 10 (2003): 1226-1233.

J. Milnor, "The Poincaré conjecture one hundred years later" (www.math.sunysb.edu/~jack).

M. Monastyrsky, *Modern mathematics in the light of the Fields Medals*, Wellesley: AK Peters, 1998.

J.W. Morgan, "Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42** (2005): 57-78

S. Nakayama, *Academic and Scientific Traditions in China, Japan and the West* (transl. by J. Dusenbury), Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1984.

S. Nasar, *A Beautiful Mind*, New York: Simon and Schuster, 1998.

J. Nash, "The imbedding problem for Riemannian manifolds", *Annals of Mathematics*, **63** (1956): 20-63.

O. Neugebauer, *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven: American Oriental Society, 1945.

O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Princeton: Princeton University Press, 1952

O. Neugebauer, *Vorlesungen über Geshichte der antiken mathematischen Wissenschaften con O. Neugebauer*, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1969.

S.P. Novikov, Topology in the 20th century: a view from the inside, *Russian Math. Surveys* **59** (2004): 3-28

J.J. O'Connor and E.F. Robertson, The MacTutor History of Mathematics Archive,

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

P. O'Shaughnessy, *A case of lies*, New York: Random House, 2005.

R. Osserman, *Poetry of the Universe*, New York: Doubleday, 1995.

J.-P. Otal, "Thurston's hyperbolization of Haken manifolds", in *Surveys in Differential Geometry*, C.C. Hsiung, S.-T. Yau (eds), vol. 3, Cambridge: International Press, 1998, 77-194.

C.D. Papakyriapoulos "On Dehn's lemma and the asphericity of knots" *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A **43** (1957): 169-172 and *Annals of Mathematics* **66** (1957): 1-26.

C.D. Papakyriakopoulos, "On solid tori", *Proc. London Math. Soc,* **III, Ser 7** (1957): 281-299.

C.D. Papakyriakopoulos, "Some problems on 3-dimensional manifolds". *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958): 317-335.

C.D. Papakyriakopoulos, A reduction of the Poincaré Conjecture to group theoretic conjectures, *Ann. of Math* **77** (1963): 250-305.

K.H. Parshall and D.E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematical Community 1876-1900: J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, Providence: American Mathematical Society, 1994.

K.H. Parshall, A.C. Rice (eds), *Mathematics Unbound: The evolution of an international mathematical research communtiy, 1800-1945*, American Mathematical Society, Providence and London Mathematical Society, London, 2002.

G. Perelman, "Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll", *J. Diff. Geom.* **40** (1994): 299-305

G. Perelman, "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications", math.DG/0211159 (11 November 2002), "Ricci flow with surgery on three-manifolds, math. DG/0303109 (10 March 2003), "Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds", math.DG/0307245 (17 July 2003).

M. Peterson, "Dante and the 3-sphere", *American Journal of Physics* **47** (1979): 1031-1035.

H. Poincaré, "Sur les functions fuchsiennes", *C.R. Acad. Sci.*, **92** (14 Feb 1881): 333-335; **92** (21 Feb 1881): 395-396; **92** (4 Apr): 859-861.

H. Poincaré, *Oeuvres de Henri Poincaré*, Gauthiers-Villars, Paris, 1952.

H. Poincaré, *Papers on Fuchsian Functions*, (trans. by J. Stillwell), New York: Springer-Verlag, 1985

H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, (edited and introduced by D. Goroff), American Institute of Physics, New York, 1993.

H. Poincaré, *The Value of Science: Essential Writings of Henri Poincaré*, ed. Stephen Jay Gould, The Modern Library (Random House), New York, 2001.

J.-C Pont, *La Topologie Algébrique des origins à Poincaré*, Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

C. Ptolemy, *Claudius Ptolemy The Geography* edited and translated by E.L. Stevenson, Dover Publications, New York: Dover, 1991.

E. Rêgo, C. Rourke, "Heegaard diagrams and homotopy 3-spheres", *Topology* **27** (1988): 137-143.

C. Reid, *Hilbert*, New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1970.

C. Reid, *Courant in Gottingen and New York, The story of an improbable mathematician*, New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976.

B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, (Zweite Auflage, bearbeitet von Heinrich Weber), Leipzig: B.G. Teubner, 1892, 541-558.

C. Rourke, "Characterisation of the three-sphere following Haken", *Turkish J. Math*, **18** (1994). 60-69.

C. Rourke, "Algorithms to disprove the Poincaré conjecture", *Turkish J. Math*, **21** (1997): 99-110

D.E Rowe, "'Jewish Mathematics' at Gottingen in the Era of Felix Klein", *Isis*, **77** (1986): 422-449.

D.E. Rowe, "Klein, Hilbert and the Gottingen Mathematical Tradition", *Osiris* (1989): 186-213

J B. Russell, *Inventing the Flat Earth: Columbus and Modern Historians*, Westport: Praeger Publishing, 1991.

L. Russo, *The forgotten revolution: How science was born in 300 BC and Why it had to be reborn*, New York Springer 2003.

D.G. Saari (ed.), *The way it was: Mathematics from the early years of the Bulletin*, Providence: American Mathematical Society, 2003.

K. Sabbagh, *The Riemann hypothesis: The greatest unsolved problem in mathematics*, New York: Farrar, Strauss, and Giroux, 2002.

K.S. Sarkaria, "The topological work of Henri Poincaré", in *History of topology*, I.M. James (ed.), Amsterdam: Elsevier, 1999, 123-168

E. Scholz, "The concept of a manifold, 1850-1950", in *History of Topology*, I M James (ed), Amsterdam: Elsevier, 1999, 25-64.

H. Seifert, W. Threlfall, *A textbook of topology* (trans. by M.A. Goldman), New York, Academic Press, 1980.

A. Sossinsky, *Knots: Mathematics with a Twist*, (trans. by G. Weiss), Cambridge: Harvard Univ Press, 2002.

S. Smale, The generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math.*, **74** (1961): 391-406.

J. Stallings, On the loop theorem, *Ann. of Math* **72** (1960): 12-19.

J. R. Stallings, "How not to prove the Poincaré conjecture" in *Topology Seminar Wisconsin*, R.H. Bnng (ed.), Princeton: Princeton University Press, 2006, 83-86.

J. Stillwell, *Geometry of Surfaces*, New York: Spnnger-Verlag, 1992.

T.L. Thickstun, "Taming and the Poincaré conjecture", *Trans. Amer Math. Soc.*, **238** (1978): 385-396.

T.L. Thickstun, "Open acyclic 3-manifolds, a loop theorem and the Poincaré conjecture", *Bull. Amer. Math Soc.*, **4** (1981): 192-194.

R. Thom, *Mathematical Models of Morphogenesis*, (English translation by W.M. Brookes), New York: Halsted Press, 1983.

W. Threlfall and H. Seifert, "Topologische Untersuchung der Discontuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen der dreidimensionalen sphärische Raumes I", *Mathematische Annalen* **104** (1930): 1-70.

W.P Thurston, "Existence of codimension-one foliations", *Ann. of Math.*, **104** (1976): 249-268.

W P Thurston, "Mathematical Education", *Notices Amer. Math. Soc.* **37** (1990): 844-850.

W. P. Thurston, "On proof and progress in mathematics", *Bull. Amer. Math. Soc.* **30** (1994): 161-177.

W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*. vol. 1 (ed By S. Levy), Princeton: Princeton Univ. Press, 1997

W.P. Thurston, "How to see 3-manifolds", *Classical and Quantum Gravity*, **15** (1994): 2545-2571.

W.P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Electronic version 1.1, March 2002, http://www.msri.org/publications/books/gt3m.

H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensional Mannigfaltigkeiten, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **19** (1908): 1-118.

O. Veblen, *Analysis Situs*, New York: American Mathematical Society, 1922.

B.L. van der Waerden, *Science Awakening I: Egyptian, Babylonian, and Greek Mathematics*, English translation by A. Dresden with additions by the author, Leyden. Noordhooff, 1975.

C. Weber and H. Seifert, "Die beiden Dodekaedräume," *Mathematische Zeitschrift*, **37**, no. 2, (1933), 237.

J. Weeks, *The Shape of Space*, 2nd ed., New York, Basel: Marcel Dekker, 2002.

J. Weeks, The Poincaré dodecahedral space and the mystery of the missing fluctuations, *Notices Amer. Math. Soc.*, **51** (2004): 610 - 619.

A. Weil, "Riemann, Betti, and the birth of topology", *Archive for History of Exact Sciences*, **20** (1979): 9-96.

A.N. Whitehead, *The Aims of Education and other Essays*, New York: Macmillan, 1967.

J H C Whitehead, "Certain theorems about three-dimensional manifolds", *Quart J. Math.* **5** (1934): 308-320.

J H.C. Whitehead, "Three-dimensional manifolds (corrigendum)", *Quart. J. Math* **6** (1935): 80.

J H.C. Whitehead, "On the sphere in 3-manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc* **64** (1958): 161-166.

Đọc thêm

Sau đây là danh mục ngắn các tác phẩm, các bài viết dành cho các bạn muốn tham khảo, tìm hiểu thêm. Các bạn có thể xem thêm phần trích dẫn trong mục lục sách tham khảo

Để tham khảo tiểu sử các nhà toán học, nguồn tư liệu tốt nhất có thể tiếp cận là từ điển tiểu sử khoa học của Gillispie. Nguồn thông tin trực tuyến MacTutor History được điều hành bởi J.J.O'Connor và E.F. Robertson (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html) chứa đựng các thông tin tham khảo ngắn gọn, sống động về các nhà toán học. Các bạn cũng có thể tiếp cận được ở đây các tóm tắt súc tích về các chủ đề toán học. Thông tin từ Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki) ngày càng trở nên mạnh mẽ và mang tính học thuật cao.

Để tìm hiểu thêm về tiểu sử các nhà toán học các bạn có thể tìm đọc tài liệu của Laugwitz viết về Riemann, Buhler viết về Gauss, và Reid nói về Hilbert. Xen lẫn trong tiểu sử nhiều phần trong tài liệu của Laugwitz và Bühler đòi hỏi người đọc phải có nền tảng toán học vững chắc. Vào thời điểm này khó có thể tìm được tư liệu tiểu sử nào đầy đủ về Poincaré. Một tác phẩm xứng tầm với cuộc đời và công trình của ông hứa hẹn sẽ ra đời trong năm 2010. Trong lúc chờ đợi tác phẩm này, chúng ta có

thể tìm hiểu về cuộc đời và sự nghiệp của Poincaré được tóm tắt bởi Bottazzini. Tuy vậy tài liệu này mới chỉ có bản tiếng Pháp. Tác phẩm của Galison nói về tác động to lớn của hoàn cảnh xã hội đến công việc của Poincaré và Einstein. Để biết thêm về các tổ chức xã hội đã hỗ trợ và ủng hộ các nhà toán học các bạn có thể tìm đọc tác phẩm của Nakayama.

Với bạn đọc có nền tảng toán học hạn chế, tài liệu tham khảo thích hợp nhất có thể giúp các bạn hiểu hơn về mối quan hệ giữa hình học và topo học trong trường hợp đa tạp hai và ba chiều là tác phẩm của Jeff Weeks - *Hình dạng của không gian* (The Shape of Space). Quyển sách này không yêu cầu kĩ năng vi-tích phân.

Cho những ai có nền tảng kiến thức toán học vững hơn thì cuốn *Hình học và topo học ba chiều* của Thurston, và các bài giảng của ông ở Đại học Princeton (có trên website của MSRI) là những tài liệu tuyệt vời.

Bài viết của Cannon trong cuốn sách của Levy - *Flavors of Geometry* (tạm dịch: Những sắc thái của hình học) đã giới thiệu một số mô hình hình học hyperbolic có thể dễ dàng tiếp cận nếu bạn đọc đã học qua một khóa về vi-tích phân.

Để được giới thiệu về lí thuyết thắt nút trong hình học topo, bạn đọc có thể tìm đọc các tác phẩm của C. Adams hoặc A. Sossinsky (các tác phẩm này chứa đựng những tư liệu khác nhau).

Đối với các bạn đã trải qua vài năm học vi-tích phân ở chương trình đại học thì giới thiệu ngắn gọn súc tích về

hình học topo mà các bạn có thể tham khảo là tác phẩm của Kosinski - *Các đa tạp khả vi*. Bài viết của Barden và Thomas cũng là sự lựa chọn hợp lí. Để tìm hiểu về hình học Riemann, tôi rất muốn giới thiệu đến các bạn các tác giả Gallot, Hulin và Lafontaine. Những quyển sách của các tác giả này đòi hỏi sự nghiên cứu nghiêm túc từ phía người đọc (tốt hơn cả là bạn đọc nên tìm cho mình người đồng hành trong quá trình tìm hiểu các tác phẩm này).

Bài nghiên cứu của Hamilton năm 1995 khảo sát các điểm kì dị của dòng chảy Ricci (được tái xuất bản trong tuyển tập các bài nghiên cứu của Cao và những người khác về dòng chảy Ricci - *Cao et al.'s Collected Papers on the Ricci Flow*) có lẽ là các tài liệu tốt nhất cho việc bắt đầu tìm hiểu thêm thông tin về dòng chảy Ricci. Tác phẩm sắp ra đời của Tian và Morgan sẽ là cuốn sách đầy đủ nhất về công việc nghiên cứu và sự kiểm chứng của Perelman về phỏng đoán của Poincaré.

Nguồn minh họa

Hình minh họa 1 và 2 được tạo bởi tác giả dựa trên các bản đồ tham khảo có nguồn từ CIA's *The World Factbook* (www.cia.gov/cia/publications/factbook).

Hình minh họa 3 được lấy từ nguồn tham khảo trực tuyến của Library of Congress. (B Agnese, *Portolan atlas of 9 charts and a world map, etc. Dedicated to Hieronymus Ruffault, Abbot of St. Vaast*, 1544, Call No. G1001.A4 1544, digital ID: g3200m gct00001 http://hdl.loc.gov/loc.gmd/g3200m gct00001).

Hình minh họa 4 và 5 được tạo bởi tác giả dựa trên các bản đồ tham khảo có nguồn từ CIA's *The World Factbook*.

Hình minh họa 6-17 được tạo bởi tác giả

Nguồn của hình minh họa 18 chưa được xác định.

Hình minh họa 19 được xây dựng bởi tác giả với sự lồng ghép từ hình minh họa 20. Hình minh họa 20 là bản phác thảo về Thiên Đường của Doré trong tác phẩm *Thần khúc* của Dante. Được sao chụp lại từ ấn bản của Dover (1976).

Hình minh họa 21 và 25 được tạo bởi tác giả.

Hình minh họa 26 là bức ảnh chụp tác phẩm tranh sơn dầu của Carl Freidrich Gauss của họa sĩ C.A Jensen (1792-1870) do tác giả chụp. Nguồn từ Đại học Archiv der Georg-August, Göttingen, Germany.

Hình minh họa 27 và 37 được tạo bởi tác giả.

Hình minh họa 38 và 39 có nguồn từ Archiv der Stiftung Benectius Gotthelf Teubner Leipzig/Dresden/Berlin/Stuttgart.

Có thể nói các hình minh họa 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,

17, 19, 21, 22, 23. 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53 được xây dựng bởi chính các độc giả (Một số đã được tạo nên bởi các giáo viên trợ giảng, hoặc được in lại từ các nguồn khác).

Về các hình minh họa được xây dựng dựa trên các bản đồ (1, 2, 3, 4, 5, 18) liệu có phải là các bản đồ gốc mà bạn đã sử dụng và chỉnh sửa là các bản đồ có tác quyền hay là các bản đồ được phép tham khảo tự do?

Một nguồn rất quan trọng là các bức tranh được sử dụng trong các hình minh họa 20, 26, 38, 39, 41, 48. Liệu có bức nào được in lại từ các quyển sách khác? Các bức khác được lấy từ các nguồn khác liệu đã được trích dẫn cụ thể về nguồn tham khảo? Xin vui lòng liên hệ với tôi nếu bạn muốn bàn bạc về vấn đề này.

Hình minh họa số 40 không có nguồn gốc tham khảo, liệu có cần xin phép?

Vài dòng về tác giả

Donal O'Shea là Trưởng khoa và Hiệu phó học vụ tại trường Mount Holyoke College, đồng thời cũng là giáo sư giảng dạy môn Toán tại đây. Là một nhà hình học đại số, ông đã viết nhiều sách và tài liệu chuyên môn, các bài báo nghiên cứu của ông có mặt ở nhiều tạp chí và kỉ yếu. O'Shea là thành viên Hội Toán học Mĩ, Liên hiệp Toán học Mĩ và các hội toán học của Canada, London và Pháp. Ông sống ở Nam Hadley, Massachusetts. Ông cũng là thành viên của Ủy ban trao giải thưởng Thiên niên kỉ đầu tiền cho Grigory Perelman về công trình tìm ra đáp án cho giả thuyết Poincaré.



NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

53 Nguyễn Du - Quận Hai Bà Trưng - Hà Nội

ĐT: (84-4) 3945 4661 - Fax: (84-4) 3945 4660

P. Phát hành: (84-4) 3944 7279 - P. Biên tập: (84-4) 3944 7278

P. Truyền thông: (84-4) 3944 7280

E-mail: lienhe@nxbtrithuc.com.vn

Website: www.nxbtrithuc.com.vn

http://www.muasach.nxbtrithuc.com.vn/

DONAL O'SHEA

Giả thuyết Poincaré

Cuộc tìm kiếm hình dạng vũ trụ

Nguyễn Lương Quang, Vũ Khuê Tâm
và Phạm Cao Tùng *dịch*

Chịu trách nhiệm xuất bản:

CHU HẢO

Biên tập: NGUYỄN ANH QUÂN
VŨ THU HẰNG

Bìa: TRẦN THỊ TUYẾT

Trình bày: NGUYỄN NGUYỆT LINH

In 800 cuốn, khổ 13x20.5 cm.

Tại Xí nghiệp in Nhà xuất bản Văn hóa Dân tộc.

Giấy đăng ký KHXB số: 149-2012/CXB/33-02/TrT.

Quyết định xuất bản số: 18/QĐ – NXB , ngày 12/07/2012.

In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2012.

Giả thuyết POINCARÉ

"Cuốn sách này chỉ bàn về một bài toán duy nhất. Nó được đưa ra bởi nhà toán học kì tài người Pháp Henri Poincaré hơn một trăm năm trước, và kể từ đó đã cuốn hút cũng như làm phật lòng nhiều nhà toán học. Nó chỉ vừa mới được giải quyết. Đối tượng mà giả thuyết Poincaré hướng đến là trung tâm của tri kiến về chính bản thân chúng ta và về vũ trụ mà chúng ta đang sống."

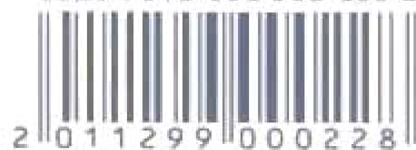
(Trích **Lời tựa**)

*Cuốn sách này thay lời tưởng nhớ đến nhà toán học, triết gia người Pháp Henri Poincaré nhân kỉ niệm **100 năm ngày mất** của ông (17/7/1912 - 17/7/2012).*

20

100 năm POINCARÉ ngày mất





ISBN: 978-604-908-400-3

Giá: 95.000đ